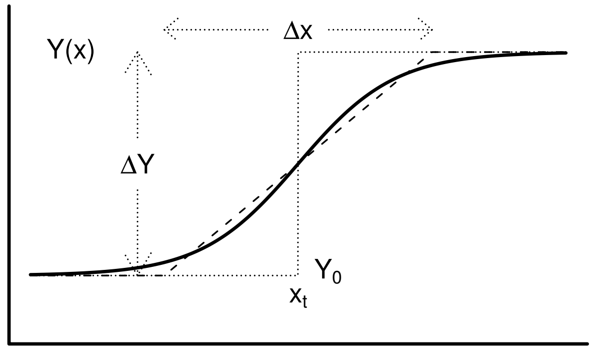
MINISTÉRIO DA AGRICULTURA,
PECUÁRIA E ABASTECIMENTO

Comunicado Técnico 310

ISSN 0100-8862
Novembro, 2002
Concórdia, SC



Funções de Transição para uso em Modelagem

Flávio Bello Fialho[1]

Introdução

Um modelo é uma representação matemática de um sistema físico. A modelagem é a criação, calibração, teste e validação de modelos, ao passo que a simulação consiste no uso de um modelo para predizer o estado de um sistema ao longo do tempo. Um dos passos fundamentais para o processo de modelagem é a escolha de funções matemáticas adequadas para representar um sistema físico.

Em muitas circunstâncias, é necessário representar uma mudança mais ou menos abrupta num sistema. Um exemplo é o fenômeno da vasodilatação periférica que ocorre em animais, como resposta a um aumento da temperatura ambiente. Isto ocorre dentro de uma faixa estreita de temperatura, o que o caracteriza como um estado de transição. Outro exemplo que pode ser citado é uma mudança no regime de alimentação de animais (diversos níveis de restrição ou à vontade), que pode modificar a velocidade de ganho de peso.

Existem tipos de transição diferenciados, bem como diversos modos de expressar matematicamente cada tipo de transição. O objetivo deste trabalho é descrever algumas funções de cada tipo e apresentar um grupo de funções de transição contínuas, mais adequadas para modelagem.

Tipos de transição

Três tipos básicos de transição podem ser definidos:

Mudança de nível: Uma variável pode ter um determinado valor antes de um momento de transição e um valor diferente após a transição. Por exemplo, a taxa de ganho de peso de um animal recebendo alimentação restrita aumenta quando ele passa a receber alimentação à vontade, conforme o gráfico de ganho de peso da Figura 1a.

Mudança de taxa: A variação no valor de uma variável pode ser diferente antes e depois da transição, de modo que, quando plotada num gráfico, a declividade da curva mude. Por exemplo, o peso corporal de um animal sob restrição alimentar cresce devagar até o momento em que a alimentação passa a ser à vontade, quando o crescimento passa a ser mais rápido, como no gráfico de peso corporal da Figura 1b.

Pulso: Um evento pode ocorrer apenas no momento da transição, na forma de um pulso. Um exemplo pode ser a mudança de alimentação restrita para alimentação à vontade, que ocorre num só instante, como o pulso no gráfico de mudança no nível de alimentação da Figura 1c.

Matematicamente, uma mudança de taxa é a integral de uma mudança de nível, que é a integral de um pulso. Visto de outra forma, um pulso é a derivada de uma mudança de nível, que é a derivada de uma mudança de taxa, de modo que os três tipos de função estão relacionados.

[1]Eng. Agr. PhD, Embrapa Suínos e Aves.

Embrapa

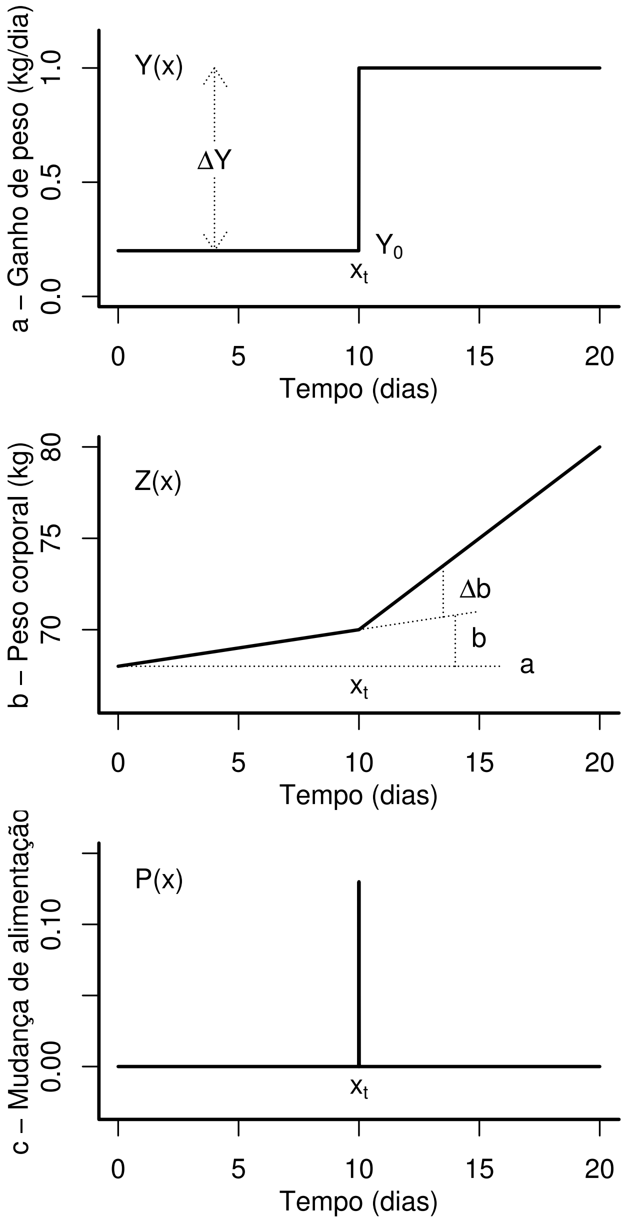


Figura 1 – Funções de transição instantânea

Transição instantânea

O modo mais primitivo de se representar uma transição é considerar que ela ocorra instantaneamente, ou seja, que o período de transição seja zero, conforme mostrado na Figura 1. Sendo x a variável independente (geralmente tempo) e x_t o momento da transição, as funções de mudança de nível ($Y(x)$), mudança de taxa ($Z(x)$) e pulso ($P(x)$) são definidas do modo a seguir.

Mudança de nível: A função $Y(x)$ tem um valor antes de x_t e um valor diferente depois de x_t. Sendo Y_0 o valor (nível) da variável antes da transição e ΔY a variação no nível causada pela transição, tem-se:

$$Y(x) = \begin{cases} Y_0 & \text{para} \quad x < x_t \\ Y_0 + \Delta Y & \text{para} \quad x_t \leq x \end{cases}$$

No exemplo da Figura 1a, $x_t = 10$, $Y_0 = 0.2$ e $\Delta Y = 0.8$.

Mudança de taxa: A função $Z(x)$ tem uma declividade antes de x_t e uma declividade diferente depois de x_t. Definindo-se a e b como o intercepto e a declividade da equação linear antes da transição, respectivamente, e Δb como a variação na declividade causada pela transição, a função $Z(x)$ pode ser obtida pela integral de $Y(x)$, com as restrições $b = Y_0$, $\Delta b = \Delta Y$, $Z(x_t) = a + b \blacksquare x$ e continuidade em x_t:

$$Z(x) = \begin{cases} a + b \blacksquare x & \text{para} \quad x < x_t \\ a + b \blacksquare x + \Delta b \blacksquare (x - x_t) & \text{para} \quad x_t \leq x \end{cases}$$

No exemplo da Figura 1b, $x_t = 10$, $a = 68$, $b = 0.2$ e $\Delta b = 0.8$.

Pulso: A função $P(x)$ é a derivada da função de mudança de nível. Devido à descontinuidade em $Y(x)$, a função de pulso tem valor infinito no instante da transição e valor zero nas demais situações:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < x_t \\ \infty & \text{para} \quad x = x_t \\ 0 & \text{para} \quad x_t < x \end{cases}$$

No exemplo da Figura 1c, $x_t = 10$.

Nota-se, na Figura 1, que a função de mudança de nível $Y(x)$ é descontínua e que a função de mudança de taxa $Z(x)$ não é suave (existe um ângulo na curva). A função de pulso $P(x)$ não só é descontínua, como o único valor que difere de zero é infinito. Todas essas características das funções de transição instantânea são indesejáveis, pois dificultam a modelagem e a análise de dados para ajuste dos parâmetros do modelo. Além disso, os fenômenos naturais geralmente são contínuos, e as mudanças ocorrem dentro de um intervalo de tempo maior que zero.

Transição linear

Uma evolução no modelo de transição é considerar que a mesma não seja instantânea, mas que exista um intervalo Δx, dentro do qual a transição ocorre. Exatamente no meio deste intervalo, situa-se x_t, de modo que os limites inferior e superior do intervalo sejam $x_t - \Delta x/2$ e $x_t + \Delta x/2$.

Considerando que a mudança entre um nível e outro seja linear, as funções de transição podem ser redefinidas, conforme ilustrado na Figura 2. Sendo x a variável independente (geralmente tempo), x_t o momento da transição e Δx o intervalo de transição, as funções de mudança de nível ($Y(x)$), mudança de taxa ($Z(x)$) e pulso ($P(x)$) são definidas do modo a seguir.

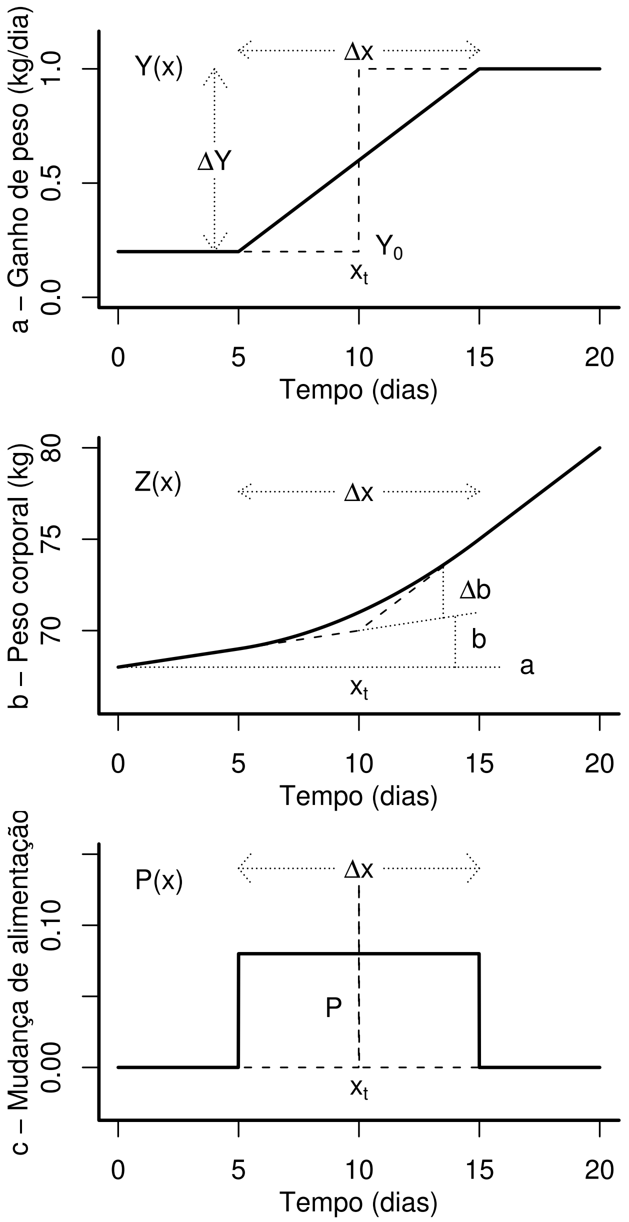


Figura 2 – Funções de transição linear

Mudança de nível: A função $Y(x)$ tem um valor antes de $x_t - \Delta x/2$ e um valor diferente depois de $x_t + \Delta x/2$. No intervalo de transição, entre $x_t - \Delta x/2$ e $x_t + \Delta x/2$, a função varia linearmente entre esses dois valores. Sendo Y_0 o valor (nível) da variável antes da transição e ΔY a variação no nível causada pela transição, e impondo-se restrições de continuidade nos pontos $x_t - \Delta x/2$ e $x_t + \Delta x/2$, tem-se:

$$Y(x) = \begin{cases} Y_0 & \text{para } x < x_t - \frac{\Delta x}{2} \\ Y_0 + \frac{\Delta Y}{\Delta x} \blacksquare \left(x - x_t + \frac{\Delta x}{2}\right) & \text{para } x_t - \frac{\Delta x}{2} \leq x < x_t + \frac{\Delta x}{2} \\ Y_0 + \Delta Y & \text{para } x_t + \frac{\Delta x}{2} \leq x \end{cases}$$

No exemplo da Figura 2a, $x_t = 10$, $\Delta x = 10$, $Y_0 = 0.2$ e $\Delta Y = 0.8$.

Mudança de taxa: A função $Z(x)$ tem uma declividade antes de $x_t - \Delta x/2$ e uma declividade diferente depois de $x_t + \Delta x/2$. No intervalo de transição, entre $x_t - \Delta x/2$ e $x_t + \Delta x/2$, a declividade varia entre esses dois valores. Definindo-se a e b como o intercepto e a declividade da equação linear antes da transição, respectivamente, e Δb como a variação na declividade causada pela transição, a função $Z(x)$ pode ser obtida pela integral de $Y(x)$, com as restrições $b = Y_0$, $\Delta b = \Delta Y$, $Z(x_t - \Delta x/2) = a + b\blacksquare x$ e continuidade em $x_t - \Delta x/2$ e $x_t + \Delta x/2$:

$$Z(x) = \begin{cases} a + b\blacksquare x & \text{para } x < x_t - \frac{\Delta x}{2} \\ a + b\blacksquare x + \frac{\Delta b}{2\blacksquare \Delta x}\blacksquare \left(x - x_t + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 & \\ & \text{para } x_t - \frac{\Delta x}{2} \leq x < x_t + \frac{\Delta x}{2} \\ a + b\blacksquare x + \Delta b\blacksquare(x - x_t) & \text{para } x_t + \frac{\Delta x}{2} \leq x \end{cases}$$

No exemplo da Figura 2b, $x_t = 10$, $\Delta x = 10$, $a = 68$, $b = 0.2$ e $\Delta b = 0.8$.

Pulso: A função $P(x)$ possui um valor diferente de zero dentro do intervalo de transição e igual a zero fora do mesmo. Definindo-se P como a intensidade do pulso (a área sob a curva), a função $P(x)$ pode ser obtida pela derivada de $Y(x)$, com a restrição $P = \Delta Y$:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } \quad x < x_t - \frac{\Delta x}{2} \\ P/\Delta x & \text{para } \quad x_t - \frac{\Delta x}{2} \leq x < x_t + \frac{\Delta x}{2} \\ 0 & \text{para } \quad x_t + \frac{\Delta x}{2} \leq x \end{cases}$$

No exemplo da Figura 2c, $x_t = 10$, $\Delta x = 10$ e $P = 0.8$.

As funções de transição linear definem uma transição mais suave que as funções de transição instantânea. No entanto, elas ainda apresentam mudanças bruscas. A função de mudança de nível $Y(x)$ apresenta ângulos e a função do pulso $P(x)$ é descontínua. Idealmente, todas as três funções deveriam ser contínuas e suaves (com derivada contínua). Além disso, a definição das funções é feita em três segmentos, quando o ideal seria uma função única que descrevesse a transição.

Outro problema é que as funções de transição linear não indicam, fora do intervalo de transição, a proximidade do mesmo, sendo a entrada na área de transição feita de forma brusca.

Transição suavizada

É possível definir funções de transição que resolvam todos os problemas anteriores. Tais funções, ilustradas na Figura 3, são contínuas, suaves e começam a apresentar sinais de mudança antes que a transição efetivamente ocorra.

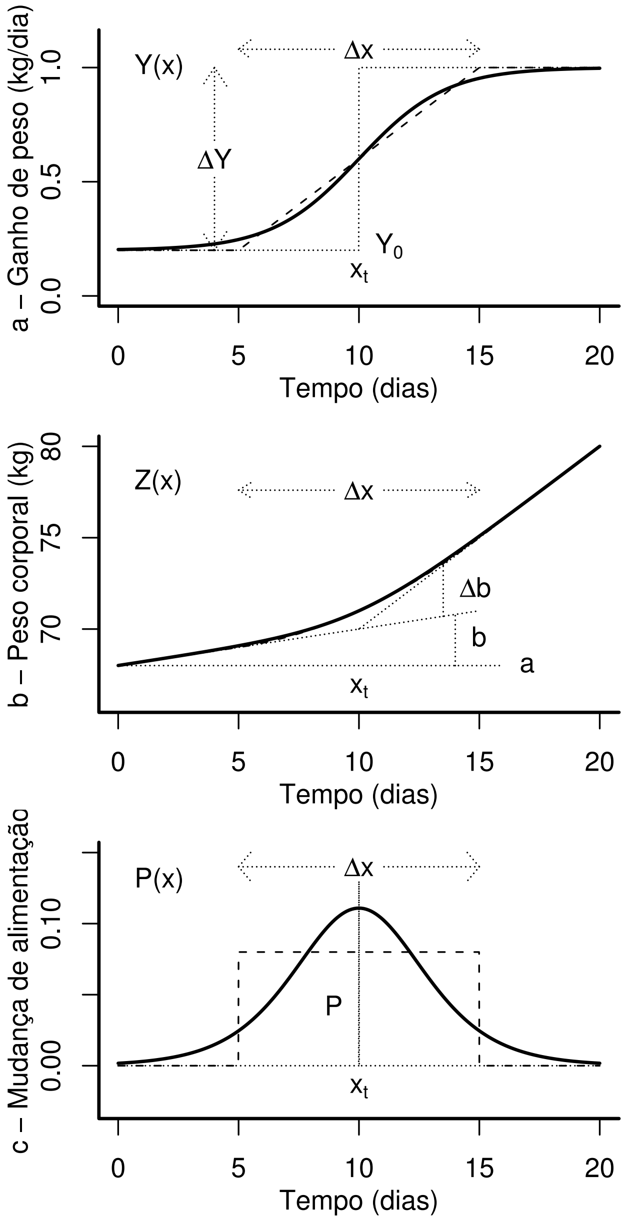


Figura 3 – Funções de transição suave

Sendo x a variável independente (geralmente tempo), x_t o momento da transição e Δx o intervalo de transição, as funções de mudança de nível ($Y(x)$), mudança de taxa ($Z(x)$) e pulso ($P(x)$) são definidas do modo a seguir.

Mudança de nível: A função $Y(x)$ tem um formato sigmóide ao redor de x_t. Sendo Y_0 o valor (nível) da variável antes da transição e ΔY a variação no nível causada pela transição, a função se aproxima assintoticamente de Y_0 quando o valor de x diminui, e de $Y_0 + \Delta Y$ quando o valor de x aumenta, tendo valor igual a $Y_0 + \Delta Y/2$ em x_t. Mantendo-se a velocidade de transição semelhante à da função linear, tem-se:

$$Y(x) = Y_0 + \Delta Y \cdot \left(1 + e^{-8 \cdot \ln 2 \cdot (x - x_t)/\Delta x}\right)^{-1}$$

No exemplo da Figura 3a, $x_t = 10$, $\Delta x = 10$, $Y_0 = 0.2$ e $\Delta Y = 0.8$.

Mudança de taxa: A função $Z(x)$ curva-se ao redor de x_t, tendo uma declividade antes da transição, que gradualmente muda para uma declividade diferente depois da mesma. Definindo-se a e b como o intercepto e a declividade da equação linear antes da transição, respectivamente, e Δb como a variação na declividade causada pela transição, a função $Z(x)$ pode ser obtida pela integral da função de mudança de nível, com as restrições $b = Y_0$, $\Delta b = \Delta Y$ e $\lim_{x \to -\infty} Z(x) = a + b \cdot x$:

$$Z(x) = a + b \cdot x + \frac{\Delta b \cdot \Delta x}{8 \cdot \ln 2} \cdot \ln\left(e^{8 \cdot \ln 2 \cdot (x - x_t)/\Delta x} + 1\right)$$

No exemplo da Figura 3b, $x_t = 10$, $\Delta x = 10$, $a = 68$, $b = 0.2$ e $\Delta b = 0.8$.

Pulso: A função $P(x)$ é a derivada da função de mudança de nível. Definindo $P = Y_0$ como a intensidade do pulso (a área sob a curva), a função tem a seguinte forma, para uma transição suave:

$$P(x) = P \cdot \frac{8 \cdot \ln 2}{\Delta x} \cdot \frac{e^{-8 \cdot \ln 2 \cdot (x - x_t)/\Delta x}}{\left(1 + e^{-8 \cdot \ln 2 \cdot (x - x_t)/\Delta x}\right)^2}$$

No exemplo da Figura 3c, $x_t = 10$, $\Delta x = 10$ e $P = 0.8$.

As transições suavizadas são contínuas, de modo que o valor da função se modifica gradualmente. À medida em que o ponto de transição x_t se aproxima, a mudança fica cada vez mais intensa, sendo máxima em x_t (no caso de um pulso, o pico ocorre em x_t). Desse modo, 5,9% da transição ocorre antes do período de transição definido por Δx, 88,2% da mudança ocorre dentro de Δx e os 5,9% restantes ocorrem depois. Isto permite um ajuste gradual do sistema ao fenômeno de transição, como geralmente ocorre em sistemas físicos.

Observações finais

Na sua forma mais simples, as funções de transição suavizada têm os valores $Y_0 = b = 0$, $\Delta Y = \Delta b = P = 1$, $x_t = 0$, $\Delta x = 8 \cdot \ln 2$ e $a = 0$, fazendo:

$$Y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$Z(x) = \ln(e^x + 1)$$

$$P(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

As funções suavizadas têm a vantagem adicional de poderem ser combinadas facilmente para representar duas ou mais transições:

$$
\begin{aligned}
Y^*(x) = \;& Y_0 + \Delta Y_1 \cdot \left(1 + e^{-8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t1})/\Delta x_1}\right)^{-1} + \\
& + \Delta Y_2 \cdot \left(1 + e^{-8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t2})/\Delta x_2}\right)^{-1} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z^*(x) = \;& a + b\cdot x + \frac{\Delta b_1 \cdot \Delta x_1}{8\cdot\ln 2}\cdot\ln\left(e^{8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t1})/\Delta x_1} + 1\right) + \\
& + \frac{\Delta b_2 \cdot \Delta x_2}{8\cdot\ln 2}\cdot\ln\left(e^{8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t2})/\Delta x_2} + 1\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^*(x) = \;& P_1 \cdot \frac{8\cdot\ln 2}{\Delta x_1}\cdot\frac{e^{-8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t1})/\Delta x_1}}{\left(1 + e^{-8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t1})/\Delta x_1}\right)^2} + \\
& + P_2 \cdot \frac{8\cdot\ln 2}{\Delta x_2}\cdot\frac{e^{-8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t2})/\Delta x_2}}{\left(1 + e^{-8\cdot\ln 2\cdot(x-x_{t2})/\Delta x_2}\right)^2} + \ldots
\end{aligned}
$$

Cada uma destas funções é simplesmente a soma de duas ou mais das funções descritas anteriormente.

As aplicações práticas das funções de transição não se restringem a trabalhos complexos de modelagem. Na análise estatística de experimentos para determinação de exigências nutricionais, por exemplo, é comum o uso da metodologia LRP (“linear response plateau”). Essa técnica representa a exigência como o ponto onde a resposta de um animal a níveis crescentes de suplementação nutricional deixa de ser linear e atinge um platô. Uma transição suave de mudança de taxa, como a descrita pela função $Z(x)$ representaria melhor a resposta biológica do animal, num caso como este.

Sempre que possível, para representar mudanças bruscas num sistema físico, as funções contínuas descritas neste trabalho devem ser usadas, no lugar de funções de transição instantâneas ou lineares.

Comunicado Técnico, 310

MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, PECUÁRIA E ABASTECIMENTO

Exemplares desta edição podem ser adquiridos na:
Embrapa Suínos e Aves
Endereço: Caixa Postal 21, 89700-000, Concórdia, SC
Fone: (49) 442-8555
Fax: (49) 442-8559
Email: sac@cnpsa.embrapa.br
1ª edição
1ª impressão (2002) tiragem: 100