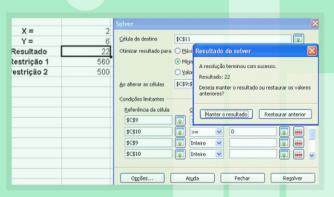
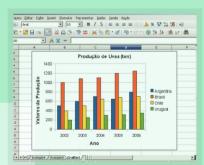
# Excel/Calc Para Resolução de Problemas de Cálculo Numérico e Pesquisa Operacional







Marcelo Gonçalves Narciso

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária Embrapa Arroz e Feijão Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento

# Excel/Calc para resolução de problemas de Cálculo Numérico e Pesquisa Operacional

Marcelo Gonçalves Narciso

Embrapa Arroz e Feijão Santo Antônio de Goiás, GO 2010 Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

#### Embrapa Arroz e Feijão

Rod. GO 462, Km 12 Caixa Postal 179

75375-000 Santo Antônio de Goiás, GO

Fone: (0xx62) 3533 2123 Fax: (0xx62) 3533 2100 www.cnpaf.embrapa.br sac@cnpaf.embrapa.br

#### Comitê Local de Publicações

Presidente: Luís Fernando Stone

Secretário-executivo: Luiz Roberto Rocha da Silva

#### Supervisão Editorial

Normalização bibliográfica: *Ana Lúcia D. de Faria* Revisão de texto: *Camilla Souza de Oliveira* Tratamento das Ilustrações: *Wesley Rodrigues* 

Editoração eletrônica: Fabiano Severino

#### 1ª edicão

1ª impressão (2011): 100 exemplares

#### Todos os direitos reservados

A reprodução não-autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei no 9.610).

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) Embrapa Arroz e Feijão

Narciso, Marcelo Goncalves.

Excel/Calc para resolução de problemas de cálculo numérico e pesquisa operacional / Marcelo Gonçalves Narciso. - Santo Antônio de Goiás : Embrapa Arroz e Feijão, 2010.

109 p.: il.; 18x16 cm

ISBN 978-85-7437- 037-8

 Planilha Excel. 2. Planilha Calc. 3. Cálculo numérico. 4. Pesquisa Operacional. I. Título. II. Embrapa Arroz e Feijão.

CDD 005.3 (21. ed.)

# **Autor**

# Marcelo Gonçalves Narciso

Engenheiro Eletrônico Doutor em Computação Aplicada Pesquisador da Embrapa Arroz e Feijão narciso@cnpaf.embrapa.br

# **Agradecimentos**

Agradeço a Deus, sem o qual não existiríamos e nem teríamos condições para fazer este livro.

Agradeço aos meus familiares, que sempre nos apoiaram em tudo, pelo amor e carinho que sempre nos deram.

Finalmente, agradeço a todos que ajudaram de forma direta e indireta na confecção deste livro.

# **Apresentação**

Este livro aborda o uso de planilhas (Calc ou Excel) para a resolução de alguns problemas de Cálculo Numérico (CN) e Pesquisa Operacional (PO). Não é motivação deste livro mostrar todos os tópicos relativos a CN e PO, visto que são muitos, mas mostrar como usar uma planilha para resolver alguns dos principais problemas. Com os exemplos deste livro, o leitor poderá resolver outros tipos de problemas de PO ou CN, visto que estará então familiarizado com a forma de resolução destes usando Calc ou Excel.

Uma grande vantagem de usar planilhas é o fato de não ser necessário o conhecimento de linguagens de programação, o que facilita muito, visto que poucas são as pessoas que sabem fazer um programa (seja qual for a linguagem de programação) e também pelo fato de que é fácil usar o Excel ou o Calc (esse último é *software* livre e qualquer pessoa pode baixar esse aplicativo pela Internet).

Para a resolução de alguns dos principais problemas de CN e PO, são usadas funções e gráficos, os quais são abordados nos três primeiros capítulos. Esses capítulos serão a base para a resolução dos problemas de CN e PO.

O Cálculo Numérico é usado em várias situações da Matemática, Física, Engenharia e várias outras áreas das ciências exatas. O mesmo pode ser dito com relação à Pesquisa Operacional, que pode ainda ser aplicada a problemas de administração de empresas, logística, problemas de cortes em geral (chapa de vidro, aço, alumínio, etc.) e muitos outros problemas, com intuito de reduzir perdas e custos (problemas de

minimização) e aumento de lucro ou rendimento (problemas de maximização).

Este livro não requer conhecimento avançado sobre Calc (ou Excel) para a compreensão dos tópicos e tem diversos exemplos explicativos, com figuras, facilitando o entendimento. Dessa forma, este livro é recomendado para um público variado, necessitando apenas uma noção sobre planilhas.

O Autor

# Sumário

Introdução	11
Fórmulas	12
Funções	17
Funções para Análise Estatística	18
Média	19
Máximo	21
Mínimo	22
Funções Lógicas	23
Função E	23
Função OU	26
Função SE	28
Funções Matemáticas	32
Função Soma	33
Função SOMASE	34
Função CONT.SE	36
Função Potência	37
Função LOG	38
Função MDC	39
Funções Matriciais	40
Função Crescimento	40
Função Tendência	41
Função MATRIZ.DETERM	
(determ. de uma matriz)	43
Função Matriz.Inversa	45
Gráficos do Calc/Excel	47
Tipos de Gráficos	47
Linha	47
XY (Dispersão)	50
Coluna	53
Pizza	55
Diagrama de Paretto	58

Obtendo relações entre duas variáveis usando o	
gráfico XY (Dispersão)	64
Métodos de obtenção de raízes de equações	
Método de Newton-Raphson	
Método da Bissecção	72
Método da Secante	76
Integração numérica	
Regra do ponto médio	79
Regra do trapézio	82
Regra de Simpsom	85
Problemas de Programação Linear	87
Introdução a PPL	87
Resolução de PPL com Solver	89
Problemas de Programação Não Linear	99
Resolução de PPNL com Solver	99
Considerações sobre PPNL	
Referências	

# Introdução

Um dos melhores sistemas produzidos pela empresa Microsoft Corporation (MICROSOFT, 2010) é um aplicativo para escritório, conhecido como "Microsoft Office" ou "MS-Office". Esse sistema contém quatro aplicativos muito usados no mercado: Word, Excel, Power Point e Access. O aplicativo Excel permite fazer cálculos matemáticos e gráficos diversos para os mais diversos fins.

Assim como existe o aplicativo Excel, existe o aplicativo Calc, porém com a vantagem de ser *software* livre. O Calc faz parte do pacote "OpenOffice.org" (OpenOffice.org, 2010), criado pela "Sun Microsystem", conhecida internacionalmente. O pacote OpenOffice.org contém aplicações para criação de documentos texto, planilha de cálculo, apresentação e um banco de dados com a finalidade de produção em escritório.

As características dos aplicativos do pacote OpenOffice.org são muito parecidas com as do pacote Microsoft Office e a utilização desse pacote é simples, uma vez que os conceitos das aplicações são os mesmos que existem para o Microsoft Office. O pacote "OpenOffice.org" é padrão para o sistema operacional Linux, isto é, o cliente não necessita adquirir um CD para instalálo após a instalação do sistema operacional. Por outro lado, pode ser instalado em ambiente Windows (XP, Vista, 7, etc.) e outros sistemas operacionais (Solaris, FreeBSD, AIX, etc.).

No Brasil existe, ainda, o pacote "BrOffice.org" (BrOffice, 2010), que é a versão em português do "OpenOffice.org", cujo aplicativo é destinado à comunidade de língua portuguesa e que está em pleno desenvolvimento. Com distribuição gratuita para utilização, qualquer pessoa pode baixar a última versão e instalar

o pacote em seu computador. Um detalhe importante a ser mencionado é que os arquivos gerados pelo pacote OpenOffice ou BrOffice são compatíveis com os arquivos gerados pelo pacote MS-Office.

#### **Fórmulas**

Tanto o Calc quanto o Excel possuem colunas (A, B, C, etc.) e linhas (1, 2, 3,..etc). Estas linhas e colunas formam células. Em cada célula pode ser escrita uma fórmula. Para exemplificar, suponha que se deseja saber o valor de y para quando x=20, onde

$$Y = 20*x - 200$$

Considere a Figura 1, na qual há os valores de x e y nas células D7 (coluna D e linha 7) e D8, respectivamente. Na célula D8, tem-se a fórmula acima.

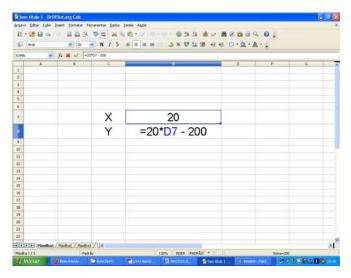


Figura 1. Como fazer uma fórmula em uma célula do Excel/Calc.

Ao apertar a tecla "Enter", aparecerá o resultado, conforme mostra a Figura 2.

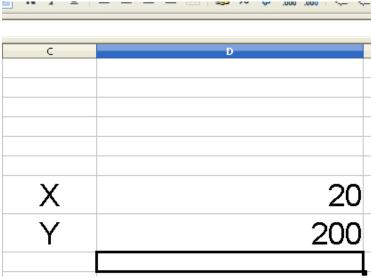


Figura 2. Resultado da fórmula em uma célula do Excel/Calc.

Observe que a fórmula foi digitada na linha 8 e coluna D, em uma célula, a qual o nome é a junção da coluna (D) com alinha 8. Portanto, a célula é o encontro da linha com a coluna em uma planilha. Na célula D8, foi digitada a fórmula "=20\*D7-200". Um detalhe importante é que o começo da fórmula tem o sinal "=". Se este sinal "=" não for inserido, a fórmula não é desenvolvida e o resultado não é calculado. Na fórmula, o valor de x é o conteúdo da célula D7, cujo valor é 20.

O exemplo mencionado mostra como fazer uma fórmula na planilha (Calc ou Excel) e esta fórmula pode conter células diversas e funções (definição e exemplos de função no capítulo 2). Outra característica muito interessante é o fato de se aproveitar o cálculo feito em uma célula para outros valores, bastando para isso arrastar a célula e os demais resultados

aparecerão. Para ficar mais claro, suponha que se deseja saber quantas calorias se perdem ao andar 1 km, 2km, 3 km até 10 km. Suponha que em cada km andado sejam perdidas 60 calorias. Assim, seja a função f(x) = 60x, onde x é a quantidade de km percorrida.

A Figura 3 mostra as colunas relativas à distância percorrida e calorias gastas. Nas células B1 a B10 estão os valores em km percorridos e nas células C1 a C10 estão os valores a serem calculados de calorias gastas. Na célula C1, tem-se a fórmula "=B1\*60", a qual devolverá o valor 60. Para o cálculo das demais células (C2 a C10), basta clicar no canto inferior direito da célula C1 (primeiro cálculo) e arrastar esta até a célula C10 que todos os cálculos serão feitos.

fх	$\Sigma$	=	=B1*60
В			С
	1		60
	2 3		
	3		
	4		
	5		
	6		

Figura 3. Arrastar uma fórmula em uma célula do Excel/Calc.

Ao se passar o mouse no canto inferior direito, aparecerá uma cruz branca (ou outra cor, conforme configuração) conforme ilustrado na Figura 3, e assim, bastar pressionar o lado esquerdo do mouse sobre este canto e arrastar a célula com a fórmula para baixo e as demais células terão suas respectivas fórmulas em

função das respectivas células (Figura 4). Um detalhe a ser mencionado é que se a célula B1 estiver descrita na fórmula como "=\$B\$1\*60" ou B\$1\*60", todas as células terão o mesmo valor, isto é, 60, visto que \$B\$1 ou B\$1 indica que o valor de B da função é fixo e é igual ao conteúdo da célula B1. Para que então a função varie em função de uma célula, à medida em que o arraste é feito, a célula a ser variada não deverá ter "\$", tal como mencionado.

<b>f</b> x <b>∑</b> =  =B10*60				
В	С	D		
1	60			
2	120			
3	180			
4	240			
5	300			
6	360			
7	420			
8	480			
9	540			
10	600			

Figura 4. Resultado após arrastar uma fórmula a partir da célula C1.

Feitas estas colocações sobre como construir uma fórmula matemática e arrastar esta fórmula para que outras células a utilizem, será visto a seguir um capítulo sobre funções, que são fórmulas que o leitor poderá usar sem ter que construir as mesmas, as quais podem ser extremamente complexas. Essas funções existem tanto para o Excel quanto para o Calc. O que pode variar de uma planilha para outra é o nome da função.

# **Funções**

As funções são elementos do Calc ou Excel que auxiliam no desenvolvimento de cálculos financeiros, matemáticos, estatísticos, datas, condições, etc., e permitem a localização de informações na própria planilha ou ainda exportar resultados para arquivos como documentos e apresentações.

Para acessar as funções do Calc ou Excel, o leitor deverá acessar o item menu "Inserir" e clicar na opção "Função", para executar o assistente de função da planilha. As funções são agrupadas por categorias e, como exemplo, tem-se as seguintes:

Funções sobre Matemática Financeira – auxiliares no controle de patrimônio, bens e valores financeiros, e também sobre operações de crédito ou financiamento.

**Funções Estatísticas** – utilizadas em processos estatísticos descritivos ou inferências estatísticas.

Funções de Data e Hora – devolvem informações relativas à data e hora, isto é, controlam as informações relacionadas ao tempo.

Funções Lógicas – utilizadas em comparações e verificações das informações da planilha.

Funções sobre Banco de Dados – utilizadas na manipulação de informações relativas a dados contidos na planilha.

Excel e Calc contêm uma opção de ajuda que o leitor poderá utilizar para esclarecer algumas dúvidas sobre as funções e outros elementos da planilha. Essa ajuda, para o caso do Calc, pode ser acessada pelo menu "Ajuda" e, em seguida, a opção "Ajuda do

BrOffice.org ou OpenOffice.org" ou quando da utilização da função, através do assistente, acessar a opção de ajuda.

Para acessar qualquer função, basta executar o assistente de função (Inserir = > Função), tal como mostra a Figura 1.

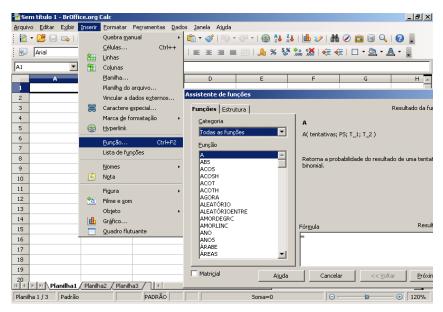


Figura 1. Item de menu do Calc para acessar o Assistente de Função.

A seguir serão exemplificadas algumas funções e com estes exemplos ficará mais fácil para o leitor acessar as demais funções existentes, que são muitas.

#### Funções para Análise Estatística

A Estatística é uma ciência que se dedica à coleta, análise e interpretação de dados. Preocupa-se com os métodos de recolha, organização, resumo, apresentação e interpretação dos dados,

assim como tirar conclusões sobre as características das fontes de onde esses foram retirados, para melhor compreender as situações (ESTATÍSTICA, 2010).

Algumas práticas estatísticas incluem, por exemplo, o planejamento, a sumarização e a interpretação de observações. Dado que o objetivo da estatística é a produção da melhor informação possível a partir dos dados disponíveis, alguns autores sugerem que a estatística é um ramo da teoria da decisão.

As funções da Estatística podem ser aplicadas em várias situações (média, variância, desvio padrão, etc.). São muitas as funções da Estatística que o Calc ou Excel podem oferecer. Assim, serão enfocadas algumas para que o leitor possa ter uma noção de como usar as demais. Serão mostradas as funções média, máximo e mínimo usando o Calc. Outras funções da Estatística (Correl, inclinação e intercepção) serão mostradas mais adiante.

#### Média

Função MÉDIA: Calcula um valor que representa a média de uma lista de valores.

Formato: **MÉDIA** (N°1,N°2,N°3,....,N°30), onde:

**Número** (N°1,N°2,N°3,....,N°30) são os valores inseridos em uma lista ou matriz.

Exemplo: Calcular a média da nota de um aluno que tirou em provas as seguintes notas: {7,5; 8; 10; 9,5}.

Após selecionar os valores e executar a função MÉDIA, a nota média do aluno para os quatro bimestres será obtida e é mostrada na Figura 2.

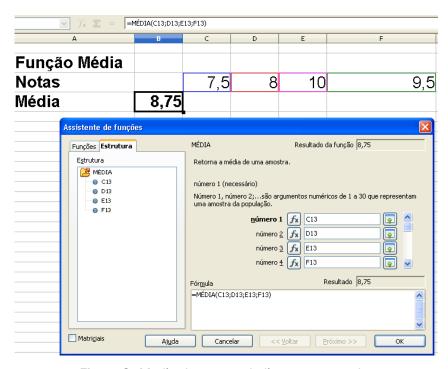


Figura 2. Média das notas da lista apresentada.

Conforme a Figura 2, o valor médio das notas foi de 8,75. Observe que existem 30 campos para preenchimento. Se a quantidade de valores for maior do que 30, por exemplo, ou um número muito maior, então pode ser usada uma outra forma de entrada de dados. Por exemplo, suponha que os dados estão na coluna C, nas linhas 11 a 100. Então, o leitor poderá fazer a média facilmente, preenchendo o campo "número 1" com "C11:C100" e então serão considerados todos os números do intervalo de células da coluna C da linha 11 até a linha 100. Os demais campos, "número 2" em diante, são então deixados em branco.

#### Máximo

Função **MÁXIMO**: Função que encontra o valor que é o maior de todos em uma matriz ou lista de valores.

Formato: **MÁXIMO** (N°1,N°2,N°3,....,N°30), onde: **Número** são valores que compõem os itens de uma lista.

Exemplo (Figura 3): Encontrar o Valor Máximo na lista de números {5,9,10,3,14,7,19,21,2,10}.



Figura 3. Função para localizar o valor máximo.

Da lista, o valor máximo encontrado foi 21. Observe que foi inserida a lista de valores da linha 13, colunas C a L, em apenas um campo (número 1).

#### Mínimo

Função MÍNIMO: Encontra o valor menor de uma matriz ou lista de valores descritos.

Formato: **MÍNIMO** (N°1,N°2,....,N°30), onde:

**Número** são os valores da lista na qual será encontrado o valor mínimo.

Exemplo: Quer se saber o menor lançamento da sequência de números referentes a lançamentos de peso de dez pessoas {5,9,10,3,14,7,19,21,2,10}. Inserindo os valores e configurando o assistente de função, tem-se o resultado mostrado na Figura 4.

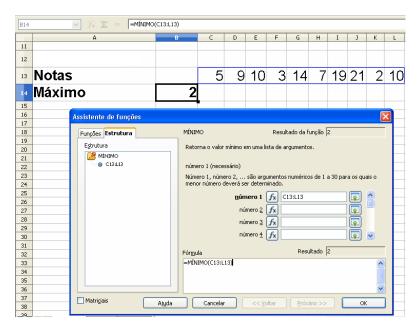


Figura 4. O menor peso encontrado pela função.

O peso mínimo encontrado para a lista anterior é 2. O leitor deverá fazer esses exemplos a título de exercício.

# Funções Lógicas

Funções lógicas servem para operações entre células que são usadas para comparação de valores, verificação de condições, intervalos, etc. Por exemplo, para o cálculo do Imposto de Renda, para saber se a alíquota vale 0%, 15% ou 27,5%, é necessário saber o valor do salário para então classificar a alíquota. Para isso, existe uma função lógica (função SE) que pode ser usada para fazer essa classificação. Assim, funções lógicas também servem para classificar valores, o que será descrito mais adiante. As mais comuns são E, SE e OU, que serão apresentadas a seguir.

#### Função E

Função E: Essa função retorna VERDADEIRO caso todos os elementos sejam verdadeiros. Entretanto, se um ou argumentos forem falsos. a função retornará FALSO. Os argumentos podem ser expressões lógicas do tipo (falso; 15 < 20; 16 = 16; A3 < 25) as quais dão como retorno valores lógicos.

Formato: E (Valor lógico 1; Valor lógico 2... Valor lógico 30), onde:

Valor lógico representa todas as expressões testadas para verificar o retorno que poderá ser VERDADEIRO OU FALSO.

Exemplo: Suponha que se deseja testar as seguintes expressões: A5 < 25; 20 > 15; 8 = 8; B5 = 1. A célula A5 contém o valor "30" e a B5, o valor "Falso". A função E vai retornar verdadeiro se todas as expressões forem verdadeiras, e falsas, se pelo menos uma for falsa.

Um exemplo de aplicação da função E, usando Calc, é mostrado na Figura 5.

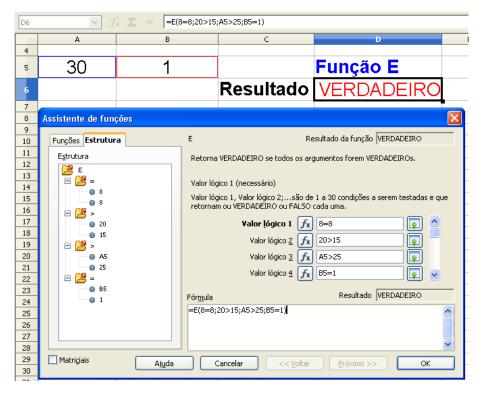


Figura 5. Exemplo de utilização da função E (resultado na célula D6).

Ao aplicar essa função, o leitor poderá criar critérios para selecionar suas informações e retirar apenas as mais relevantes para seu interesse, dependendo do arquivo e dos dados recebidos.

Considerando a tabela da Figura 6, um exemplo prático dessa aplicação seria uma resposta para a pergunta: quem tem salário maior do que 2.000, idade maior que 30 anos e mora em Campinas?

Na linha 5 coluna H da planilha ilustrada é chamada a função E para dar o status ou resultado da pergunta.



Figura 6. Utilização da função E.

A Figura 6 ilustra o preenchimento para a linha 12. Para varrer toda a lista e verificar qual linha contém os valores desejados, basta resolver primeiro a linha 10 (José, 1.000, 36, Campinas). Nessa linha, insere-se cada uma das opções (valor lógico 1 = > E10 > 2000; valor lógico 2 = > F10 > 30; e valor lógico 3 = G10 = "Campinas") na célula H10. O resultado final que estará na célula H10 será FALSO. Ao término da avaliação, basta arrastar a célula H10, usando o canto inferior direito da célula (aparecerá uma cruz pequena, a qual deverá ser arrastada, sem soltar o mouse, até a célula desejada) para que as demais células (H11 a E13) sejam preenchidas.

#### Função OU

**OU**: A função retorna o valor lógico verdadeiro se, pelo menos uma das expressões for verdadeira, caso contrário, retornará valor falso.

Formato: OU(Valor lógico 1; Valor lógico 2...Valor lógico 30), no qual:

Valor lógico são as expressões lógicas que serão calculadas para se obter o resultado Verdadeiro ou Falso.

Exemplo (Figura 7): Deseja-se saber se o valor das seguintes expressões: A5 < 25, 20 < 15, 8 = 9, e B6 = FALSO (que o sistema interpreta como sendo 0) utilizando a função OU.

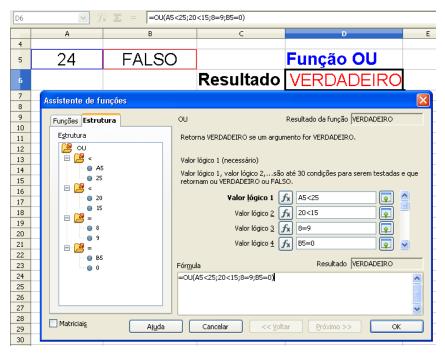


Figura 7. Critérios com a função OU.

Observe que basta uma das opções ser verdadeira que a função retornará verdadeiro.

Considerando a tabela da Figura 8, um exemplo de aplicação dessa função seria uma resposta para a pergunta: Quem tem salário maior do que 2.000 ou tem mais que 30 anos ou mora em Campinas?

Na linha 2 coluna H da planilha ilustrada abaixo é chamada a função OU para mostrar o resultado da questão.

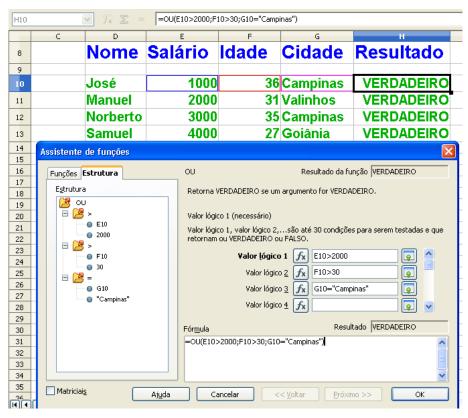


Figura 8. Utilização da função OU.

A forma de se obter o resultado é a mesma que foi feita para a função E. Resolve-se primeiro a célula H10 e depois arrasta-se o resultado para as demais células. Observe que o endereço (linha) das células mudará automaticamente à medida que o resultado da célula H10 estiver sendo arrastado. Assim, para a linha 10, as células consideradas serão E10, F10 e G10 e, para a linha 13, por exemplo, as células serão E13, F13 e G13.

O resultado final é que todas as assertivas serão VERDADEIRAS. Assim, para a função E, todos os argumentos devem ser verdadeiros para se ter o resultado final como verdade. Na função OU, basta um dos argumentos ser verdadeiro para o resultado final ser considerado verdadeiro.

#### Função SE

SE: Especifica um teste lógico que será executado.

Formato: SE(Teste; Valor então; Valor senão), onde:

**Teste** são as expressões que podem assumir o valor verdadeiro ou o valor falso.

Valor\_então (opcional): valor de retorno no caso de teste verdadeiro.

Valor\_senão (opcional): valor de retorno em caso de teste falso.

Exemplo. Suponha que exista um conjunto de nomes com as respectivas notas finais de uma dada disciplina. Suponha que se deseja classificar os alunos com a nota de corte 7. Se a nota for maior ou igual a 7, o aluno foi "Aprovado". Se for menor do que 7, o aluno deverá fazer recuperação.

Para classificar os alunos conforme descrito, basta usar a função SE, na célula E4 (Figura 9) que vai classificar cada nota conforme o valor. A Figura 9 ilustra o uso da função SE.

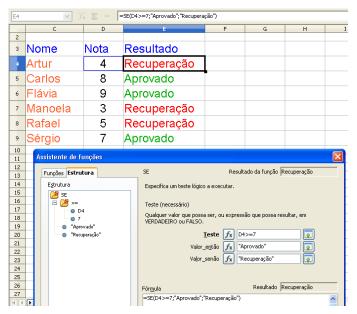


Figura 9. Uso da função SE.

Na Figura 9, podem ser observados os campos: "Teste", "Valor\_então" e "Valor\_senão". No campo Teste, tem-se a seguinte sentença: D4>=7 (nota maior ou igual a 7). Essa sentença pode ser verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, é executado o conteúdo do campo "Valor\_então", o qual contém a palavra "Aprovado". Se a sentença for falsa, será executado o conteúdo do campo "Valor\_senão", o qual contém a palavra "Recuperação". O resultado da função vai ficar na célula E4, e assim basta arrastar essa célula para que as demais células, de E5 a E9, sejam também preenchidas com o resultado.

A função SE pode ser usada para escolha de mais de duas alternativas, conforme a entrada. Por exemplo, suponha que se deseja calcular o imposto de renda (IR) de certo mês de alguns funcionários. Suponha que a regra para cálculo seja assim: se a renda for menor do que 1.300, o IR será 0%. Se for maior do que

2.400, o IR será de 27,5% sobre o salário bruto. Se a renda estiver entre 1.300 e 2.400, o IR será de 15%.

Veja a Figura 10 com os salários de cada pessoa. Na célula B5, tem-se o campo para o cálculo do IR do João, que ganha 7.000. Tem-se que testar as três alternativas citadas anteriormente para dar o valor correto. Inicialmente, é testado se o valor do salário é menor do que 1.300. Se for, então o IR é 0. Se não for, é escolhido o campo "Valor\_senão" e então ativa-se novamente a função SE (escolha novamente a função SE a partir da caixa de escolha de Função).

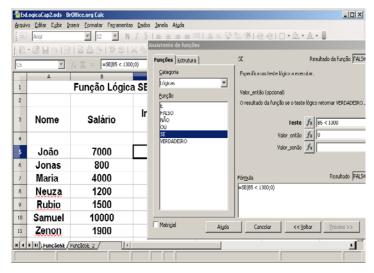


Figura 10. Usando a função SE para o cálculo do Imposto de Renda.

ilustra o caso de se escolher a opção A Figura 10 "salário < 1.300". Porém, ainda faltam opcões as salário > 2.400 e salário entre 1.300 e 2.400. Para isso, caso a salário < 1.300 falsa, opcão seia escolhe-se opcão "Valor senão", clica-se duas vezes na função SE (no menu à esquerda, onde se encontram as funções E, OU, NÃO, SE e VERDADEIRO), e então deverá aparecer, conforme a Figura 11.

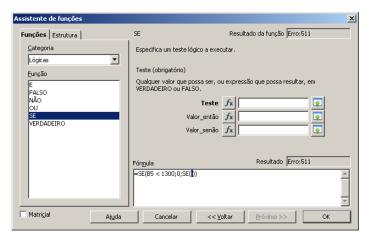


Figura 11. Uso da função SE para o cálculo do Imposto de Renda.

Observe que no campo Fórmula, aparece a expressão SE(C5 < 1300;0;SE()). Isso significa que a nova chamada da função SE aparece no campo "Valor\_senão". A seguir, basta testar a condição "B5 > 2.400". Se for verdadeira, o imposto é de 27,5% e se for falsa, de 15% sobre o salário bruto.

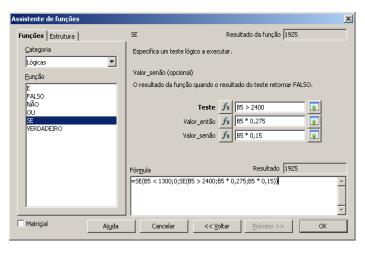


Figura 12. Usando a função SE para o cálculo do Imposto de Renda.

Observe que o cálculo é feito e o resultado da função é 1.925 (ver campo Resultado na Figura 12). Assim, após esse cálculo, basta arrastar a célula C5 e todos os demais valores do imposto de renda (IR) serão calculados.

A função SE pode ser chamada mais vezes dentro da própria função SE. No exemplo do IR, a função SE foi chamada mais de uma vez. Porém, a função SE pode ser chamada mais vezes e o mecanismo é o mesmo que foi explicado para o IR.

A função SE é muito utilizada em planilha para selecionar, separar e agrupar informações do tipo texto ou numéricas. Possui flexibilidade muito grande para trabalhar dados por períodos, formatá-los, subdividi-los ou reagrupá-los de uma forma diferente.

# Funções Matemáticas

Existem diversas funções matemáticas para diversos fins, como soma de vários valores, logaritmo de um número, exponencial, seno, etc. A forma de se usar é similar para funções apresentadas, isto é, entra-se com os parâmetros e a função fornece um valor de saída. Algumas das funções matemáticas mais usadas em planilhas serão exemplificadas a seguir: soma, cont.SE e SomaSe, potência, LOG e mdc. Outras funções da Matemática o leitor poderá facilmente executar, bastando para isso inserir um argumento, tal como é feito para os exemplos descritos neste item. As funções SOMA, SOMASE e Cont.SE são explicadas a seguir e, para tanto, considere a Tabela 1.

Tabela 1. Vendas efetuadas por uma empresa em 2000-2001.

Vendedor	Local	Valor da venda	Ano
Antônio	Uberlândia	300	2000
Bruno	Campinas	200	2001
Cláudio	Rio de Janeiro	900	2000
Maria	São Paulo	378	2000
Nadir	Belo Horizonte	456	2000
Patrícia	Goiânia	234	2001
Antônio	Campinas	987	2000
Bruno	Sumaré	456	2001
Cláudio	Hortolândia	1.234	2001
Maria	Uberlândia	765	2000
Nadir	Campinas	456	2000
Patrícia	Rio de Janeiro	2.345	2001
Antônio	São Paulo	4.567	2000
Bruno	Belo Horizonte	5.678	2000
Cláudio	Goiânia	123	2000
Maria	Campinas	12.345	2001
Nadir	Sumaré	5.414	2000
Patrícia	Hortolândia	2.345	2001
Antônio	Uberlândia	5.637	2001
Bruno	Campinas	1.267	2000
Cláudio	Rio de Janeiro	356	2001
Maria	São Paulo	2.000	2001
Nadir	Belo Horizonte	3.763	2000
Patrícia	Goiânia	846	2001

#### Função Soma

Essa função soma valores reais ou inteiros em um dado intervalo ou um conjunto de intervalos.

Formato: = SOMA(Número 1, Número 2, Número 3,...).

**Número 1**: intervalo (coluna ou linha) que contém valores a serem somados.

Os demais campos, Número 2, Número 3 e assim por diante, são tais como o campo Número 1, isto é, campos para preenchimento de valores reais ou inteiros.

Exemplo: Na Tabela 1, quanto foi o total de vendas do período 2000-2001?

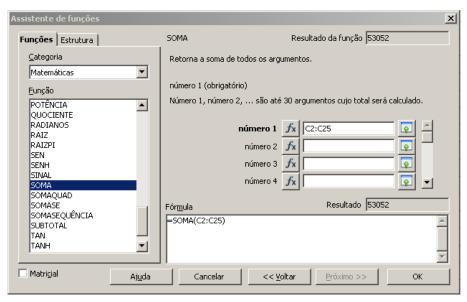


Figura 13. Retorno da função Soma.

Na Figura 13 tem-se um exemplo da aplicação da função SOMA. Observe que o campo Número 1 há o seguinte: C2:C25. Esse intervalo contém os valores a serem somados, e o resultado (neste exemplo é 53.052) aparece já nessa janela e também ficará gravado em uma célula após o botão OK ser acionado.

#### Função SOMASE

Essa função conta o número de linhas (registros) de um intervalo de células em função dos critérios inseridos para a pesquisa. Os dados devem ser numéricos.

Formato: = **SOMASE**(intervalo; critérios; intervalo soma).

**Intervalo** é o intervalo de células que se deseja calcular por critérios.

**Critérios** são os critérios na forma de um número, expressão ou texto que definem quais células serão adicionadas.

Intervalo\_Soma são as células reais a serem adicionadas se as células correspondentes no intervalo coincidirem com os critérios.

Exemplo (Figura 14): Somar todas as vendas feitas em Campinas.

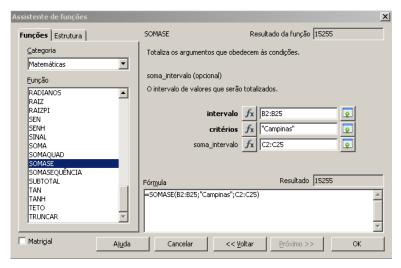


Figura 14. Função SOMASE para verificar vendas em Campinas em 2000-2001.

Na Figura 14, tem-se que a função SOMASE é da categoria Matemática e, para se obter quanto foi vendido em Campinas, basta preencher os campos da seguinte forma:

**Intervalo**: B2:B25 (coluna que contém os locais a serem pesquisados, visto que se quer obter um local, o qual é Campinas).

**Critérios:** como se deseja obter o local, o qual é Campinas, basta inserir a palavra "Campinas".

**Soma\_intervalo**: esse é o intervalo onde estão os valores a serem somados.

Ao final do preenchimento, tem-se o valor total das vendas de Campinas em 2000 e 2001, que foi 15.255.

## Funcão CONT.SE

Essa função conta os argumentos que obedecem às condições definidas.

**Formato**: = **CONT.SE**(Intervalo; Critérios).

Intervalo: Colunas que terão os possíveis critérios.

**Critérios**: As condições que são analisadas no conjunto de informações.

Exemplo de aplicação: considerando a Tabela 1, quantas vendas foram feitas pelo vendedor "Bruno"? Para isso, veja a Figura 15.

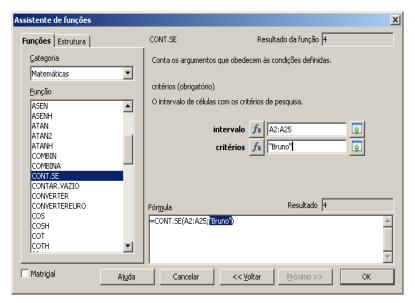


Figura 15. Valor retornado pela função CONT.SE.

No campo "Intervalo", é inserido o valor da coluna na qual se buscará o resultado (busca da palavra-chave ou valor, conforme estabelecido no campo critério). No campo "Critérios", está inserido o nome do funcionário, Bruno. Após isso, tem-se o resultado, que neste exemplo é 4, o qual aparece na própria janela da função e estará disponível em alguma célula após teclar o botão "OK".

## Função Potência

Essa função calcula um número elevado à potência de um outro número.

Formato: = POTÊNCIA(Base; Potência).

**Base**: número que será elevado a uma potência. **Potência**: Potência para a qual a base será elevada.

Exemplo: POTÊNCIA (2, 4) retornará 16.

A Figura 16 ilustra o uso da função Potência.

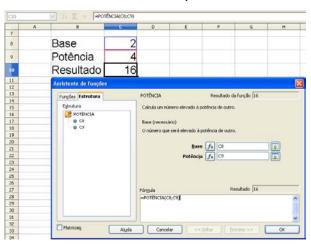


Figura 16. Exemplo de uso da função Potência.

# Função LOG

Essa função calcula o logaritmo para qualquer base especificada.

Formato: = LOG(Número; Base).

Número: um valor maior que zero para calcular o logaritmo.

Base: base do logaritmo.

Exemplo: LOG (4, 2) retornará 2.

A Figura 17 ilustra o uso da função LOG.

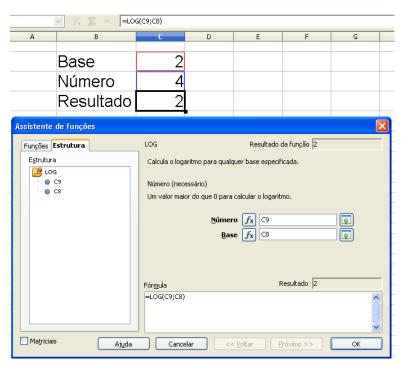


Figura 17. Exemplo de uso da função LOG.

# Função MDC

Essa função calcula o máximo divisor comum entre vários números.

**Formato**: = MDC(Inteiro 1;Inteiro 2;...; Inteiro N).

Inteiro1,..., Inteiro4: um número inteiro diferente de zero.

**Exemplo:** MDC (16; 8; 24;12) retornará 4 pois 4 é o maior divisor comum a 16, 8, 24 e 12.

A Figura 18 ilustra o uso dessa função.

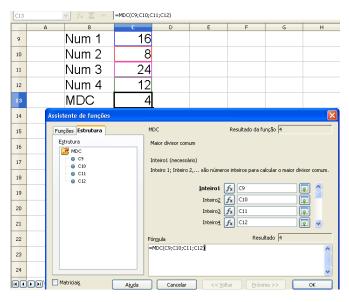


Figura 18. Exemplo de uso da função MDC.

Se a quantidade de parâmetros for maior que 4, então, nos campos Inteiro1, Inteiro 2, Inteiro3, e Inteiro4, pode-se inserir os intervalos onde estão os valores. Por exemplo, admita que existam 10 valores, e esses estão nas células C1 a C10. Então, no campo Inteiro1, basta inserir C1:C10 e assim o MDC será calculado.

# Funções matriciais

Uma matriz pode ser entendida como uma tabela na qual são guardados dados. Existem várias operações com matrizes, e neste item serão explorados quatro tipos de operações: crescimento, tendência, determinante e matriz inversa. Cada uma das funções será exemplificada a seguir.

#### Função Crescimento

Essa função calcula pontos na função de regressão exponencial.

**Formato**: = CRESCIMENTO(dados\_Y; dados\_X;novos\_dados\_X; tipo\_função).

Dados\_Y: matriz de dados Y.Dados X: matriz de dados X.

Novos\_dados\_X: matriz de dados X para cálculo de valores Y.

**Tipo\_função**: opcional. Se for igual a 0, a equação de cálculo será do tipo:

 $y = m^x$  ou  $y = b^*m^x$ ,  $m^x$  significa "m elevado a x";

Suponha que se tenha os dados  $X = \{1,2,3,4,5\}$  e os dados  $Y = \{2,4,8,16,32\}$ . Quanto será o valor de y para x = 6 e x = 7, supondo que Y varia exponencialmente com x? A Figura 19 ilustra o uso da função Crescimento.

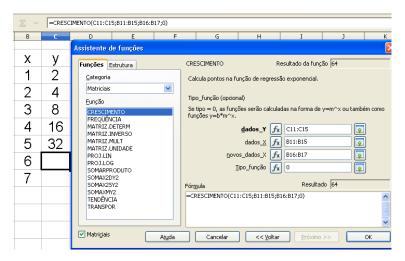


Figura 19. Exemplo de uso da função Crescimento.

Observe que os dados de Y estão dispostos de C11 a C15 e os valores respectivos de X estão em B11 a B15. Os valores que se desejam saber estão nas células C16 e C17 (valores de Y) e os valores respectivos de X são 6 e 7. Ao chamar a função Crescimento, a partir da célula C16, e depois de preencher os valores, conforme a Figura 19, tem-se que os valores de Y serão 64 e 128 para os respectivos valores de X, 6 e 7.

# Função Tendência

Essa função calcula pontos na função de regressão linear.

**Formato**: =TENDÊNCIA(dados\_Y; dados\_X; novos\_dados\_X; tipo função).

Dados\_Y: matriz de dados Y.
Dados X: matriz de dados X.

Novos dados X: matriz de dados X para cálculo de valores Y.

**Tipo\_linear**: opcional. Se for igual a 0, a reta irá passar pela origem. Caso contrário, a reta será deslocada.

Suponha que se tenha os dados  $X = \{1,2,3,4,5\}$  e os dados  $Y = \{2,4,6,8,10\}$ . Quanto será o valor de y para x = 6 e x = 7? Supõe-se que Y varia linearmente com X. A Figura 20 ilustra o uso da função Tendência.

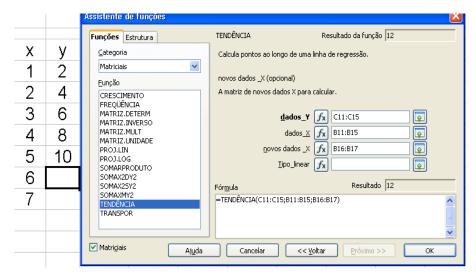


Figura 20. Exemplo de uso da função Tendência.

Observe que essa função é análoga à função Crescimento, com a diferença que Tendência é para funções lineares, isto é, quando o valor de Y cresce proporcionalmente ao valor de X. Se for feito um gráfico de X versus Y (ver capítulo 3, XY Dispersão), o leitor verá que o gráfico será uma reta.

Para o preenchimento dos campos, dados\_Y foi preenchido com as células C11 a C15. Dados\_X foi preenchido com os dados B11 a B15. Os valores B16 e B17 foram preenchidos para novos\_dados\_X e tipo\_linear não foi preenchido. Após clicar em OK, os valores das células C16 e C17 serão 12 e 14, respectivamente.

# Função MATRIZ.DETERM (determinante de uma matriz)

Essa função calcula o valor do determinante de uma matriz.

**Formato**: = MATRIZ.DETERM(MATRIZ).

MATRIZ: matriz de dados cujo determinante se deseja saber.

Uma aplicação de determinante é para a resolução de problemas lineares. Veja um exemplo simples. Admita que a idade do pai somada com a idade do filho seja igual a 120 anos e que a diferença entre as idades seja 42. Qual é a idade do pai?

Seja f a idade do filho e p a idade do pai. Assim, do enunciado, tem-se que:

$$1p + 1f = 120$$
  
 $1p - 1f = 42$ 

Seja a matriz A os coeficientes de p e f no sistema, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Seja B1 a matriz na qual a coluna dos coeficientes de p é substituída pela coluna do lado direito da igualdade. Assim:

$$\mathbf{B1} = \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ 42 & -1 \end{pmatrix}$$

Pela teoria de sistemas lineares, o valor da idade do pai é dado por:

p = determinante(B1)/determinante(A).

A Figura 21 ilustra o cálculo do determinante de A.

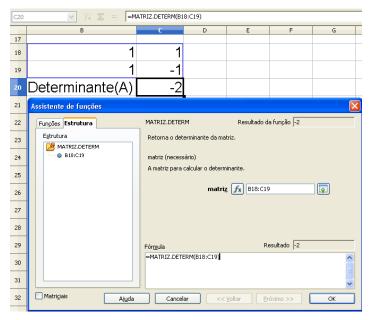


Figura 21. Exemplo de uso da função determinante.

Observe que o valor de determinante de A vale -2. De forma análoga, o leitor pode calcular o determinante de B1, e encontrará o valor -162. Assim, a idade do pai é igual a

p = determinante (B1) / determinante (A) = -162/-2 = 81.

Assim, tem-se o valor da idade do pai. Vale a pena mencionar que o determinante só pode ser calculado se a matriz for quadrada (número de linhas igual ao número de colunas). No caso deste exemplo, tem-se uma matriz 2x2.

Embora este exemplo seja bem simples, quanto maior for a dimensão da matriz (número de linhas ou de colunas), mais complexo é o cálculo do determinante, caso esse seja feito manualmente. Assim, graças a essa função, é necessário apenas

que se tenham os componentes da matriz para o cálculo do determinante.

## Função Matriz.Inversa

Essa função calcula a matriz inversa de uma dada matriz quadrada.

**Formato**: = MATRIZ.Inverso(MATRIZ).

MATRIZ: matriz de dados cuja matriz inversa se deseja saber.

No exemplo anterior, o conjunto de equações

$$1p + 1f = 120$$
  
 $1p - 1f = 42$ 

pode ser descrito como Ax = B. Neste caso,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 120 \\ 42 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix}$$

Pela teoria das matrizes,  $A^{-1}$  é a matriz inversa de A. Multiplicando-se a equação AX = B por  $A^{-1}$ , tem-se a seguinte expressão:

$$A^{-1} AX = A^{-1}B = > x = A^{-1}B;$$

visto que A<sup>-1</sup> A é igual a matriz identidade.

Assim, se for conhecido o valor da matriz inversa de A, basta multiplicar essa pela matriz B e, então, tem-se o valor de x, que é uma matriz com duas linhas e uma coluna, e seus elementos são p e f. A Figura 22 ilustra o cálculo de A<sup>-1</sup>.

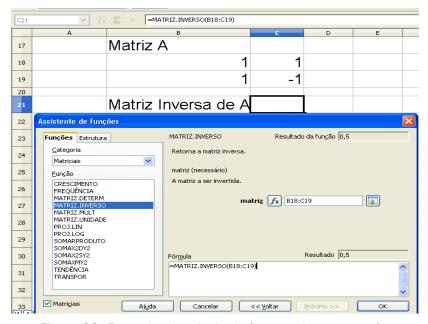


Figura 22. Exemplo de cálculo de inversa de uma matriz.

Após clicar em Ok, vai aparecer a inversa da matriz A, ou seja,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Uma vez que se tenham os valores das matrizes A<sup>-1</sup> e B, basta multiplicar as duas. O resultado será a matriz:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 81 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Do resultado acima, tem-se que p=81 e f=39. O leitor poderá fazer essa multiplicação de matrizes,  $A^{-1}$  e B, usando a função matriz.mult. Nessa, os parâmetros de entrada são as matrizes  $A^{-1}$  e B e o leitor terá o resultado obtido acima após a multiplicação das duas matrizes. Fica para o leitor essa verificação a título de exercício.

## Gráficos do Calc/Excel

O gráfico é uma forma mais fácil de visualização de dados, principalmente quando os dados estão em tabelas muito grandes, que não permitem uma visualização rápida das informações.

Normalmente, as tabelas servem para fazer resumos de dados e o gráfico tem como finalidade a visualização dessas informações de forma mais fácil e tirar conclusões.

A planilha disponibiliza uma variedade de tipos de gráficos para o leitor criar e apresentar as informações que resumiu ou analisou. De maneira geral, o gráfico dependerá do tipo da informação que se deseja transmitir. O Calc, assim como o Excel, possui uma série de tipos de gráficos: barras, linhas, pizza, etc. A seguir, tem-se mais detalhes sobre os mais conhecidos ou usados.

# Tipos de Gráficos

#### Linha

Trata-se de um gráfico que exibe tendências ou evoluções da informação em intervalos iguais.

Para exemplificar, suponha que se deseja saber a evolução dos lucros de uma empresa no ano. Admita que se tenham os dados relativos a lucro de cada mês de um dado ano. Suponha que estes dados estejam em uma tabela, tal como a Tabela 1.

Tabela 1.	Lucro	mensal	da	empresa.
-----------	-------	--------	----	----------

Mês	Lucro (milhões de R\$)	Mês	Lucro (milhões de R\$)
Janeiro	2	Julho	5
Fevereiro	1	Agosto	4
Março	3	Setembro	3
Abril	4	Outubro	4
Maio	3	Novembro	6
Junho	4	Dezembro	7

Para fazer um gráfico de linha desses dados, basta marcar os dados na planilha com o mouse e chamar o Assistente de Gráfico (Inserir => Gráfico). Após isso, escolhe-se então o tipo linha, e vai aparecer o assistente para esse tipo de gráfico, tal como descrito na Figura 1.

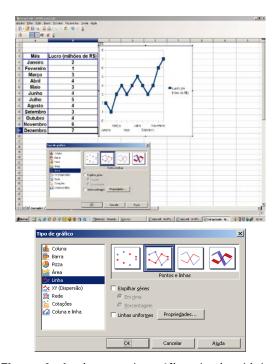


Figura 1. Assistente do gráfico do tipo Linha.

O Assistente do tipo de gráfico "linha" tem formulários para escolher opções de "Intervalo de Dados", "Série de Dados" e "Elementos do Gráfico". A opção "Intervalo de Dados" conterá os dados que deverão aparecer no gráfico. Se os dados foram marcados inicialmente, antes de chamar o Assistente para gráficos, então não há necessidade de preencher os dados em "Intervalo de Dados". Quanto à opção "Série de Dados", trata-se de uma forma de se adicionar mais dados, inclusive de outras categorias ou temas,

para compor o gráfico final. O item "Elementos do Gráfico" contém definições para os rótulos dos eixos X e Y do gráfico, além do nome do gráfico, e onde ficarão as legendas.

Após preencher todos os dados relativos ao assistente de gráfico "linha", tem-se o gráfico, o qual está ilustrado na Figura 2.

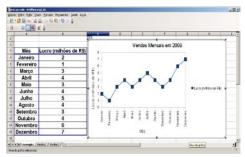


Figura 2. Gráfico do tipo Linha.

Esse tipo de gráfico (linha) poderá também ter mais de uma curva, para melhor análise de um processo. Por exemplo, suponha que se deseja saber quanto cada funcionário vendeu (produto x quantidade) em um dado período. A Figura 3 ilustra um gráfico, feito pelo assistente de gráfico tipo linha para que se vejam as vendas de todos os funcionários simultaneamente.

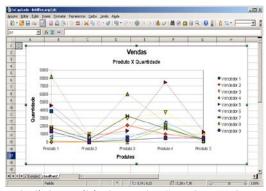


Figura 3. Gráfico de linha exibindo evoluções de vendas por funcionários.

# XY (Dispersão)

Esse tipo de gráfico exibe informação de como uma grandeza X varia com uma outra grandeza Y, mostrando a relação de valores em séries de dados.

De forma análoga à construção do gráfico do tipo linha, o mesmo se faz com o gráfico do tipo XY (Dispersão). Esse gráfico é usado quando se tem dados numéricos se relacionando com outros dados numéricos. Por exemplo, ano e inflação. Um possível gráfico do tipo XY (Dispersão) seria o da Figura 4.

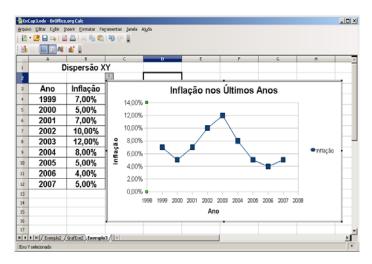
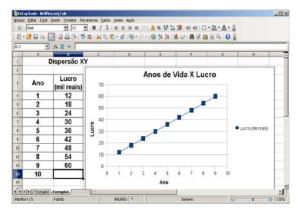


Figura 4. Gráfico de Dispersão XY mostrando a inflação de cada ano.

Suponha agora que se deseja fazer uma estimativa de lucro para um determinado ano de vida de uma empresa. Suponha que a empresa tenha completado nove anos de existência e existem dados de lucro para cada ano da Empresa. Foi feito um gráfico do tipo Dispersão XY e o mesmo ficou da forma demonstrada na Figura 5.



**Figura 5.** Gráfico de Dispersão XY mostrando ao lucro de cada ano da empresa.

Suponha que se deseja saber agora qual será o lucro da empresa ao final dos seus dez anos de existência (ano 2008), admitindo-se a sequência lógica da curva apresentada. Para isso, faz-se o seguinte procedimento. Invoca-se a função Estatística => Previsão. Com essa função, basta alimentar com os dados do eixo X (campo Dados\_X), eixo Y (campo Dados\_Y) e o valor de x (campo VALOR) que se deseja saber o valor de Y. A Figura 6 ilustra o que foi mencionado.

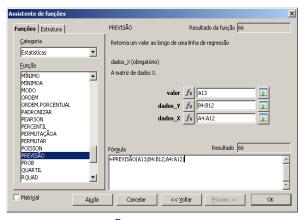


Figura 6. Função PREVISÃO para estimar o valor de Y dado X.

Após preencher os dados, tem-se o valor estimado para Y, dado o valor de X e os dados anteriores de X e Y. No caso deste exemplo, o resultado é 66. Essa função é apropriada quando o gráfico tiver um aspecto de segmento de reta (linear).

Toda reta tem a equação do tipo y = Ax + B. A constante A é a inclinação da reta em relação ao eixo X. Supondo que seja  $\alpha$  o ângulo entre o eixo X e a reta, o valor de A é numericamente igual a tangente de  $\alpha$ , isto é,  $A = tg \alpha$ . O valor de B é o ponto do eixo Y onde a reta cruza (intercepta) esse eixo. Para se determinar os valores de A e B, que são números reais, tem-se as seguintes funções da Estatística:

A = INCLINAÇÃO(C4:C12; B4:B12). O valor retornado é 6. B = INTERCEPCÃO(C4:C12; B4:B12). O valor retornado é 6.

Para exemplificar o uso de uma delas, seja a função INCLINAÇÃO. Na Figura 7, tem-se como preencher a função.

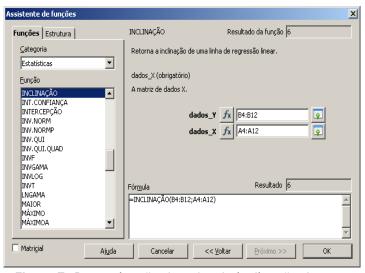


Figura 7. Determinação do valor da inclinação da reta.

Observe que os intervalos considerados para as funções são os valores de Lucro (C4:C12) e Ano respectivamente (B4:B12). Assim, se os pontos formam uma reta, a equação dessa será tal como descrita acima, isto é, y = 6x + 6, onde Y representa o Lucro e X o Ano.

Além da forma visual de verificar que os dados formam uma reta, existe também uma outra maneira, através da função CORREL. Se o valor dessa função for igual a 1 ou -1, tem-se uma reta. Se o valor for 1, significa que os valores de Y crescem proporcionalmente com o aumento dos valores de X. Se o valor for -1, significa que os valores de Y decrescem à medida que os valores de X aumentam. Análogo às funções INCLINAÇÃO e INTERCEPÇÃO, os valores de entrada da função são os valores de Y e X (no caso deste exemplo, CORREL(C4:C12; B4:B12)). Se o valor for muito próximo de 1, ou -1, (por exemplo 0,9 ou -0,9), os pontos praticamente formam uma reta e a fórmula obtida para a reta pode ser usada como uma aproximação da função que relaciona X com Y.

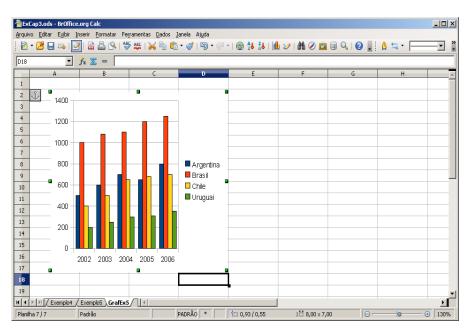
#### Coluna

Esse tipo de gráfico é utilizado para comparar variações entre itens medidos ou um mesmo item em períodos diferentes. Exemplo: Vendas de Produtos por Lojas ou Vendas de Produtos em um ano.

Para exemplificar, suponha a produção de uvas, em toneladas, dos países Argentina, Brasil, Chile e Uruguai. A Tabela 2 contém os dados a serem mostrados graficamente. Marca-se a tabela e então é chamado o Assistente de Gráficos (Figura 8) e, após isso, é escolhido o tipo "Coluna".

Tabela 2. Produção de Uvas (toneladas).

Ano/País	Argentina	Brasil	Chile	Uruguai
2002	500	1000	400	200
2003	600	1080	500	250
2004	700	1100	650	300
2005	650	1200	680	310
2006	800	1250	700	350



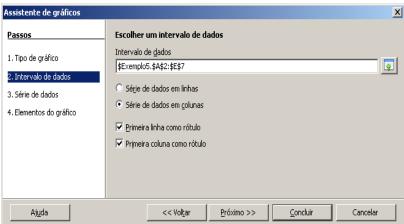


Figura 8. Gráfico de Colunas - Assistente de Gráfico.

Ao avançar para "Elementos do Gráfico", basta preencher os campos e terminar a configuração do gráfico. Para este

exemplo, o título é "Produção de Uvas (ton)", o eixo X é "Ano" e o eixo Y, "Valor da Produção". Depois de feito isso, tem-se o gráfico mostrado na Figura 9.



**Figura 9.** Gráfico de Colunas da produção de uvas (Ton) de 2002 a 2006.

Observa-se que fica mais fácil de visualizar os valores e a relação entre a produção de cada país usando o gráfico tipo Colunas.

#### Pizza

Esse gráfico é normalmente utilizado para representar valores percentuais nos quais cada fatia representa um percentual do total. No exemplo anterior, sobre a produção de uvas, para se ter um gráfico em forma de pizza de um dado ano, basta marcar a primeira linha da tabela (rótulo) e uma outra linha, conforme o ano desejado, e acionar o Assistente de Gráficos (Figura 10). Por exemplo, suponha que se deseja fazer o gráfico de pizza do ano 2006. Basta então marcar a primeira linha (rótulo) e a linha que contém o ano 2006. Após isso, e com a ajuda do Assistente de Gráfico, tem-se o gráfico mostrado na Figura 11.

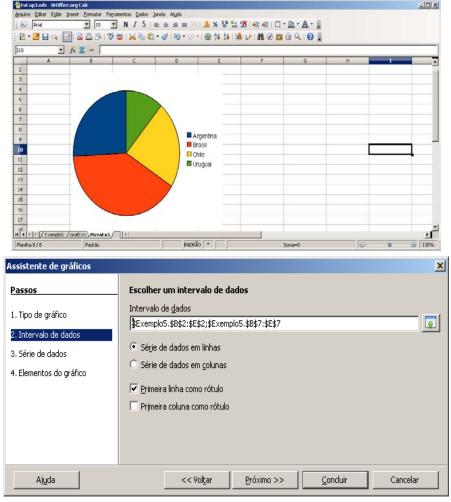


Figura 10. Gráfico tipo Pizza da produção de uvas (Ton) de 2006.

Observe que no formulário "Intervalo de dados", conforme figura, a série de dados é por linhas (escolher opção "Série de dados em linhas"). A partir daí, basta preencher os formulários "Série de dados" e "elementos do gráfico" e então terminar o gráfico, o qual ficaria da forma exemplificada na Figura 11.

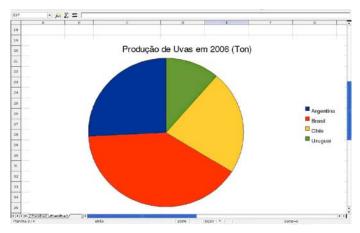


Figura 11. Gráfico tipo Pizza, inicial, da produção de uvas (Ton) de 2006.

Para que o gráfico tenha valores (reais ou em porcentagem), basta acionar duas vezes o lado esquerdo do mouse em cima da pizza que aparecerá um formulário para preencher as opções para mostrar os valores e demais dados que se desejar (Figura 12).

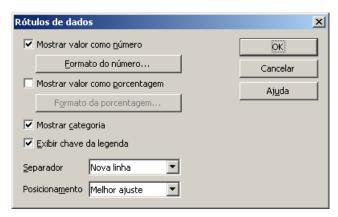


Figura 12. Gráfico tipo Pizza, inserindo valores no gráfico.

Após escolher a opção "Rótulo de Dados" e marcando os campos desejados, tem-se o gráfico finalizado conforme a Figura 13.

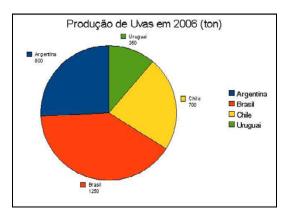


Figura 13. Gráfico tipo Pizza sobre a produção de uvas em 2006.

Além dos gráficos apresentados (Colunas, Dispersão XY, Pizza, Linha), existem outros que seguem a mesma forma de construção de gráficos, que o leitor poderá verificar, baseado nas observações dos gráficos que foram construídos até aqui. Os demais gráficos, que não serão abordados aqui, mas que o leitor pode facilmente fazer, são "Barra", "Área", "Rede", "Ações" e "Coluna e Linha".

Os exemplos apresentados anteriormente são muito utilizados na apresentação de informações para gestores e administradores quando se trata de qualidade de produtos e serviços, além das vendas da área comercial.

# Diagrama de Paretto

Vilfredo Paretto (1848-1923) foi um economista e sociólogo italiano. Ele demonstrou que a distribuição de riqueza não era proporcional aos habitantes economicamente ativos. Ao contrário, havia uma grande concentração de riqueza em poder de um reduzido grupo de pessoas - 80% da riqueza nas mãos de 20% da população.

O diagrama de Paretto torna visivelmente clara a relação ação/benefício, possibilitando priorizar a ação que trará o melhor resultado. Consiste num gráfico de barras que ordena as frequências das ocorrências da maior para a menor e permite a localização de problemas vitais e a eliminação de perdas. Para exemplificar, veja a Tabela 3, que contém os chamados feitos em um dia.

Tabela 3. Tipos de chamados versus %.

Tipos de chamados	Total	% do total de chamados
E-mail	189	1,15
Informações diversas	10516	64,2
Outros	9	0,05
Problemas diversos	1961	11,97
Solicitação de serviços	3005	18,35
Visita Virtual	27	0,16
Web Site	673	4,11
Total Geral	16380	100,00

Para se construir um diagrama de Paretto, inicialmente ordenase os dados em ordem decrescente, segundo a porcentagem de chamados. Para fazer esta ordenação, basta acessar o menu em Dados = > Classificar, conforme mostrado na Figura 14.

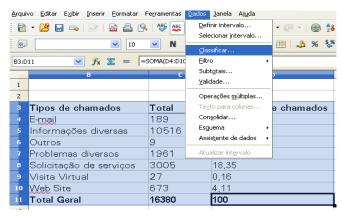


Figura 14. Como ordenar uma tabela conforme uma ou mais colunas.

Ao escolher "Dados = > Classificar", vai aparecer uma janela para se classificar as colunas que se desejam, em ordem decrescente ou crescente. No caso do diagrama de Paretto descrito acima, escolher "% do total de chamadas" e Decrescente. A Figura 15 ilustra o que foi descrito.

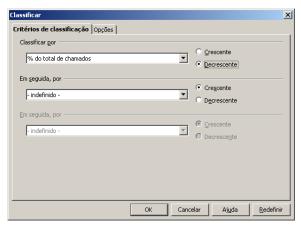


Figura 15. Classificar uma coluna ou mais em ordem crescente ou decrescente.

Em seguida, a Tabela 4, após ser ordenada, ficará da seguinte forma:

**Tabela 4.** Ordenação decrescente das colunas segundo o total.

Tipos de Chamados	Total	% do total de chamados
Informações diversas	10516	64,2
Solicitação de serviços	3005	18,35
Problemas diversos	1961	11,97
Web Site	673	4,11
E-mail	189	1,15
Visita Virtual	27	0,16
Outros	9	0,05
Total Geral	16380	100

Com a Tabela 4, pode-se então construir o gráfico "Tipos de Chamados" versus "% do total dos chamados". O gráfico de barras seria tal como a Figura 16.

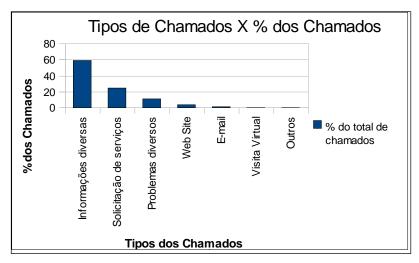


Figura 16. Gráfico de Paretto para tipos de chamado e a % de ocorrência dos chamados.

Do gráfico da Figura 16, pode-se ver que "Informações diversas" e "Solicitação de serviços" contribuem em pelo menos 80% dos chamados. O gráfico de Paretto é muito usado para mostrar os principais fatores de custos, lucros, locais de maiores acidentes ou roubos etc. de forma visual e muito útil para a tomada de decisões ou relatórios gerenciais.

Um outro exemplo relativo ao gráfico de Paretto é mostrado a seguir. O objetivo é a verificação da qualidade de produção da Indústria Experimento S/A relativo ao seu produto (X) quanto a situações como: quantidade de produtos quebrados, vendidos com defeito, não substituídos, amassados, não funcionando, com

atraso na produção, preço alto, não atende a necessidade e outros.

Cria-se então uma tabela com a coluna *Problema*, outra coluna com a *Quantidade* e mais uma para acumular os percentuais de cada problema, conforme mostra a Tabela 5.

**Tabela 5.** Deficiências de produtos e respectivas quantidades.

Problema	Quantidade	% Acumulada
Quebrado	20	
Defeito	10	
Não Substituído	5	
Amassados	30	
Não Funcionando	25	
Atraso Produção	100	
Preço Alto	22	
Não Atende Necessidade	35	
Outros	14	

Para se fazer o diagrama de Paretto, basta criar na planilha a tabela mostrada anteriormente e digitar os valores na coluna Quantidade da tabela, classificando esses valores em ordem decrescente, conforme a Tabela 6.

**Tabela 6.** Deficiências de produtos e respectivas quantidades.

		0/ 1 1
Problema	Quantidade	% Acumulada
Atraso Produção	100	
Não Atende Necessidade	35	
Amassados	30	
Não Funcionando	25	
Preço Alto	22	
Quebrado	20	
Outros	14	
Defeito	10	
Não Substituído	5	
Total	261	

Suponha os dados tais como mostra a Figura 17. Na coluna % Acumulado, deverão ser inseridos os valores porcentuais relativos aos quesitos estudados utilizando-se a seguinte fórmula cumulativa = (B2/\$B\$11) na célula do primeiro item medido e, de forma semelhante, a fórmula cumulativa (=B3/\$B\$11)+C2) do segundo item em diante para acumular os porcentuais. Na fórmula, \$B\$11 indica que o denominador será sempre o conteúdo da célula B11, pois sem a notação \$B\$11, em cada linha ter-se-ia um valor diferente para o denominador. Veja os dados da tabela na Figura 17.

_	® ExCap4.ods - BrOffice.org Calc					
Arquiv	Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda					
1	🕶 🛂 🔚 👒   🔡   🗟 🖶 🕒   🤝 😃   🦫	🏅 🛅 • 🎻   🗐 •	(C  -   (G) 2			
СЗ	<u>▼</u> 🏂 <u>=</u> =B3/\$B\$11+C2					
	А	В	С	D		
1	Problema	Quantidade	% Acumulado			
2	Atraso Produção	100	38,31%			
3	Não Atende Necessidade	35	51,72%			
4	Amassados	30	63,22%			
5	Não Funcionando	25	72,80%			
6	Preço Alto	22	81,23%	_		
7	Quebrado	20	88,89%			
8	Outros	14	94,25%			
9	Defeito	10	98,08%			
10	Não Substituído	5	100,00%			
11	Total	261				
12						
13  4   4	13					
Planitha 3 / 3 Padrão PADRÃO * Soma=51,72%						

Figura 17. Tipo de problema versus quantidade.

Um detalhe a ser mencionado é que a coluna (% acumulado) está formatada como "Porcentagem" em cada uma das células e, assim, o resultado é transformado automaticamente em porcentagem. Efetuados os cálculos percentuais acumulativos e ordenando-se os dados em função da percentagem, tal como foi visto anteriormente, basta criar o gráfico conforme mostrado anteriormente e o resultado final está ilustrado na Figura 18.

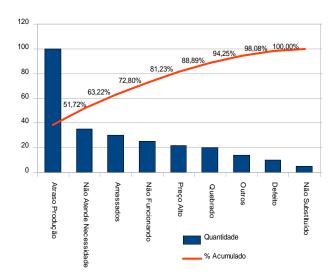


Figura 18. Gráfico de Paretto para o estudo do produto.

A conclusão do estudo executado para o produto (X) da indústria Experimento S/A foi resumido no gráfico mostrado anteriormente na Figura 18, o qual permite avaliar as situações principais que criam limitação quanto ao maior consumo desse produto (atraso na produção e não atende a necessidade) e que ao serem amenizadas ou resolvidas permitirão um consumo maior do produto.

# Obtendo relações entre duas variáveis usando o gráfico XY (Dispersão)

O tipo de gráfico "XY (Dispersão)", descrito e exemplificado neste Capítulo usando o Calc, mostra como Y varia conforme X varia. Os dados podem gerar gráficos lineares (retas) e não lineares. Para o caso de gráficos que não sejam retas, existem diversos tipos de curvas que podem descrever os pontos (parábola, polinômio de grau 2 ou maior, exponenciais, etc.).

Para exemplificar, suponha a Figura 19, que é uma planilha Calc com dados de X e Y e se deseja saber a relação (função) entre eles, caso exista.

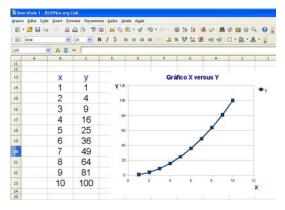


Figura 19. Gráfico X versus Y.

Na Figura 19, tem-se um conjunto de pontos e, no caso, suponha que seja necessário obter a relação entre X e Y através de uma fórmula. Dado o gráfico, para se obter a fórmula basta clicar com o lado direito do mouse em cima da curva, tal como está descrito na Figura 20.



Figura 20. Como obter a fórmula de uma curva.

Na Figura 20, tem-se a janela que irá aparecer ao clicar com o lado direito do mouse sobre a curva (tem que ser exatamente sobre a curva). Nessa janela, basta escolher a opção "Inserir Linha de Tendência". Caso essa janela não apareça, clique duas vezes sobre a figura do gráfico com o lado esquerdo do mouse, e então tente novamente, isto é, clique com o lado direito do mouse sobre o gráfico. Após isso, uma outra janela irá aparecer, conforme descrito na Figura 21.



Figura 21. Opções para se obter a fórmula que relaciona X e Y.

Na Figura 21 existem opções para o tipo de Regressão (Linear, Logarítmica, Exponencial, Geométrica) e também Equação, com as opções para "Mostrar Equação" e "Mostrar o coeficiente de correlação (R²)". Ao escolher a opção Geométrica, "Mostrar a equação" e o coeficiente de correlação, conforme mostra a Figura 21, irá aparecer uma equação e um valor para o coeficiente de correlação (R²), tal como está ilustrado na Figura 22.

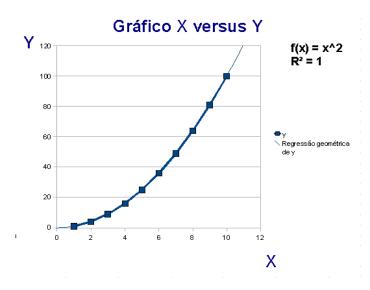


Figura 22. Equação que relaciona Y com X e o valor de R-quadrado.

A Figura 22 mostra o valor da equação e (R²). Observa-se que a equação que relaciona X com Y é igual a:

 $y = f(x) = x^2 = x^2$  (x elevado ao quadrado, "^" significa "elevado a");

e o valor de  $(R^2)$  é igual a 1. Quanto mais próximo de 1 for o valor de  $(R^2)$ , mais a equação se aproxima da ideal ou ainda, é a equação exata.

Assim, se o leitor substituir cada um dos valores de x (1, 2, 3, 4,..., 10) na fórmula, verá que os valores serão os mesmos valores de y que estão nas figuras anteriores, mostrando que a fórmula representa a relação entre X e Y.

Um comentário que pode ser feito é que, com a fórmula, o leitor poderá inserir outros valores de x e obter outros valores de

y. Por exemplo, se x representasse o ano e y o lucro em cada ano da empresa, qual seria o lucro no ano 11? Bastaria substituir o valor de x por 11 e o leitor teria y = 121.

Outro comentário é que, se o leitor não entende muito sobre curvas (Linear, Exponencial, etc.), pode-se ir testando as curvas e verificando se o valor de (R²) é igual a 1, de preferência, ou muito perto de 1. A equação da curva que tiver o melhor valor para (R²) (mais perto de 1 ou igual a 1, de preferência) é a que o leitor deverá escolher para usar.

# Métodos de obtenção de raízes de equações

Em muitos casos, é necessários saber a raiz de uma função de uma variável. Para isto, existem métodos diversos, que estão amplamente descritos na literatura. Neste capítulo, serão descritos os métodos para obtenção de raízes Newton-Raphson, bissecção, e secante.

Qualquer que seja o método a ser usado para se obter uma raiz, é interessante que se tenha o intervalo no qual a raiz está, visto que os métodos a serem descritos neste capítulo procuram a raiz no intervalo dado. Veja a Figura 1, que ilustra uma função a qual tem uma raiz.

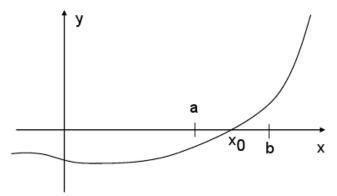


Figura 1. Raiz de uma equação no intervalo [a,b].

Observa-se que a raiz está no intervalo [a,b] e que y=f(a) <0 e y=f(b) > 0. Desta forma, f(a).f(b) < 0. Assim, para se obter um intervalo no qual uma raiz se encontra, basta obter os valores de f(a) e f(b) tal que o produto entre eles seja negativo e que, preferencialmente, a e b sejam o mais próximo possível.

#### Método de Newton-Raphson

Seja uma função f(x) e sua derivada primeira s(x). Seja um ponto inicial Xo, que tem o seu valor f(Xo) e s(Xo). Para se obter um ponto mais perto da raiz, tem-se a equação:

$$X1 = Xo - \{ f(Xo) / s(Xo) \}$$

Para se obter o próximo ponto mais próximo da raiz, tem-se a equação:

$$X1 = Xo - \{ f(Xo) / s(Xo) \}$$

Assim, de forma geral, a equação para um dado ponto X(n+1) é dado por:

$$X(n+1) = Xn - \{ f(Xn) / s(Xn) \}$$

Para exemplificar, seja a equação  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . A derivada da função é s(x) = 2x - 5. Seja o ponto Xo = 0. Assim, o ponto X1 é dado por:

$$X1 = 0 - (0^2 - 5*0 + 6) / (2*0 - 5) = -6/-5 = 1.2$$

Para os demais valores de x, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$X2 = 1.2 - (1.2^2 - 5*1.2 + 6) / (2*1.2 - 5) = 1.75$$
  
 $X3 = 1.75 - (1.75^2 - 5*1.75 + 6) / (2*1.75 - 5) = 1.958$   
 $X4 = 1.958 - (1.958^2 - 5*1.958 + 6) / (2*1.958 - 5) = 1.999$   
 $X5 = 1.999 - (1.999^2 - 5*1.999 + 6) / (2*1.999 - 5) = 2.00$   
 $X6 = 2.0 - (2.0^2 - 5*2.0 + 6) / (2*2.0 - 5) = 2.00$ 

O critério de parada é dado quando um valor de x é igual ao do passo anterior (no exemplo visto, X5=X6) ou ainda, quando a função f(x) for igual a zero. Estes cálculos podem ser colocados em uma planilha Calc ou Excel. A Tabela 1 ilustra o que foi dito.

Tabela 1. Método de Newton-Raphson.

Xn	F(Xn)	S(Xn)	X n+1
0,000	6	-5	1,2
1,200	1,44	-2,6	1,75
1,750	0,31	-1,5	1,958
1,960	0,04	-1,08	1,999
1,999	0	-1	2,000
2	0	-1	2,000

A Tabela 1 contém as colunas Xn, F(Xn), S(Xn) e Xn + 1. Em cada coluna foram colocadas as fórmulas e arrastadas as mesmas para as demais linhas até que se tenha o critério de parada, conforme mencionado anteriormente.

Para se fazer estes cálculos, inicialmente, insira os rótulos Xn, F(Xn), S(Xn) e Xn+1, tal como a Tabela 1. O valor inicial de Xn é 0. Assim, suponha que este valor esteja na célula A2, e os demais valores de F(Xn), S(Xn) e Xn+1 estão nas colunas B, C e D respectivamente. Na célula B2, relativa a F(Xn), insira "=  $A2^2 - 5^*A2 + 6$ . Na célula C2, insira "=  $A2^*A2 - 5$ ". Na célula D2 insira "= A2 - B2/C2".

Após isso, irá aparecer a primeira linha de valores (conforme a Tabela 1, 0,000; 6; -5; 1,2). Na linha 3, célula A3, insira "=D2", isto é, Xn agora passa a ser o valor anterior de Xn+1. Arraste as células B2, C2 e D2, para a linha 3. Repita este procedimento para a linha 4 e assim sucessivamente até que os valores de Xn + 1 sejam iguais ou F(Xn) seja 0. Desta forma, tem-se o valor da raiz de f(x) usando o métode Newton-Raphson.

#### Método da Bissecção

O método de Newton é muito bom para quando se conhece a derivada primeira de f(x). Há casos em que a derivada é muito complexa de se calcular ou trabalhosa demais. Para estes casos, tem-se outros métodos. Um possível método é o da Bissecção. Veja a função a seguir.

$$f(x) = 2000 - (x+1)^X$$

A derivada de  $(x+1)^X$  é igual a  $\{\ln(x+1) + x/(1+x)\}$ \*exp[x\*ln(x+1)], caso se deseja calcular a raiz pelo método de Newton. Como nem todo mundo sabe o que é uma derivada, ou ainda, como obter uma derivada, ou ainda, uma derivada muito complexa, tem-se que o cálculo desta raiz pode ser feito pelo método da Bissecção. Este método se baseia no fato de que, se em um dado intervalo [a, b], se f(a).f(b) < 0, então existe uma raiz dento deste intervalo. Assim, basicamente, o método da Bissecção tem o seguinte algoritmo:

- 1 defina m = (a + b)/2
- 2 Se |b m| < r, então a raiz é "m" e "r" é o máximo erro permitido.

|b - m| significa valor absoluto da diferenca entre b e m.

- 3 Se f(a).f(m) < 0, então b = m, senão a = m.
- 4 repita os passos 1, 2 e 3.

Para exemplificar, veja o algoritmo acima e a função:

 $f(x) = 2000 - (x+1)^{X}$ . Busca-se então o intervalo no qual f(a).f(b) < 0. Por tentativas, obtém-se os valores de a e b, tal como ilustrado nos passos a seguir:

Para x = 0, f(0) = 
$$2000 - (0+1)^0 = 2000 - 1 = 1999$$
  
Para x = 1, f(1) =  $2000 - (1+1)^1 = 2000 - 2 = 1998$   
Para x = 2, f(2) =  $2000 - (2+1)^2 = 2000 - 9 = 1991$   
Para x = 3, f(3) =  $2000 - (3+1)^3 = 2000 - 64 = 1936$   
Para x = 4, f(4) =  $2000 - (4+1)^4 = 2000 - 625 = 1375$   
Para x = 5, f(5) =  $(5+1)^5 = 2000 - 7776 = -5776$ 

Observe que a raiz deverá estar no intervalo [4,5] (entre 4 e 5), visto que f(4).f(5) = -7942000, que é negativo. Caso o leitor tenha dificuldade em achar este intervalo, uma alternativa seria a construção do gráfico de f(x) versus x e observar o intervalo onde a raiz está. No final deste capítulo, está a explicação de como obter o intervalo a partir do gráfico. Uma vez que o intervalo foi definido, então pode-se iniciar o algoritmo.

Desta forma, de acordo com o algoritmo descrito anteriormente, vamos aos passos:

- 1 defina m = (4 + 5)/2 = 4,5 e seja r = 0,01 o erro permitido.
- 2 Se |b m| < r, isto é,  $|5 4.5| < 0.01 \rightarrow falso$ .
- 3 Se f(4).f(4,5) < 0, o que é verdade, então b = 4,5
- 4 repita os passos 1, 2 e 3.
- 1 defina m = (4 + 4.5)/2 = 4.25
- 2 Se |b m| < r, isto é, |4,5 4,25| < 0.01 —also.
- 3 Se f(4).f(4,25) < 0, o que é falso, então a = 4,25
- 4 repita os passos 1, 2 e 3.
- 1 defina m = (4,25 + 4,5)/2 = 4,375
- 2 Se |b m| < r, isto é, |4,5 4,375| < 0,01 → falso.
- 3 Se f(4,25).f(4,375) < 0, o que é falso, então a = 4,375

4 - repita os passos 1, 2 e 3.

- 1 defina m = (4,375 + 4,5)/2 = 4,4375
- 2 Se |b m| < r, isto é, |4,5 4,4375| < 0,01 → falso.
- 3 Se f(4,375).f(4,4375) < 0, o que é falso, então a = 4,4375
- 4 repita os passos 1, 2 e 3.

Esse algoritmo vai continuando até que se obtenha a raiz. Para isso, veja a Tabela 2, que mostra o resultado final se usar o Calc ou Excel.

Tabela 2. Método da Bissecção.

Α	В	m	f(A)	f(B)	f(m)	f(A).f(m)
4,00000	5,00000	4,50000	1375,00000	-5776,00000	-146,01179	-200766,20522
4,00000	4,50000	4,25000	1375,00000	-146,01179	850,05508	1168825,73341
4,25000	4,50000	4,37500	850,05508	-146,01179	431,78429	367040,42907
4,37500	4,50000	4,43750	431,78429	-146,01179	166,27477	71794,83353
4,43750	4,50000	4,46875	166,27477	-146,01179	16,47666	2739,65339
4,46875	4,50000	4,48438	16,47666	-146,01179	-63,11425	-1039,91231
4,46875	4,48438	4,47656	16,47666	-63,11425	-22,91407	-377,54741
4,46875	4,47656	4,47266	16,47666	-22,91407	-3,11858	-51,38375
4,46875	4,47266	4,47070	16,47666	-3,11858	6,70394	110,45863
4,47070	4,47266	4,47168	6,70394	-3,11858	1,79892	12,05989
4,47168	4,47266	4,47217	1,79892	-3,11858	-0,65826	-1,18417
4,47168	4,47217	4,47192	1,79892	-0,65826	0,57072	1,02668
4,47192	4,47217	4,47205	0,57072	-0,65826	-0,04367	-0,02493
4,47192	4,47205	4,47198	0,57072	-0,04367	0,26355	0,15041
4,47198	4,47205	4,47202	0,26355	-0,04367	0,10994	0,02898
4,47202	4,47205	4,47203	0,10994	-0,04367	0,03314	0,00364
4,47203	4,47205	4,47204	0,03314	-0,04367	-0,00527	-0,00017
4,47203	4,47204	4,47203	0,03314	-0,00527	0,01393	0,00046

A Tabela 2 tem as colunas C até I e linhas 17 a 26. A segunda linha contém os valores iniciais e cálculos iniciais. Os valores de m, f(A), f(B), f(m) e f(A)\*f(m) são dados por:

m = (C19 + D19)/2;  $f(A) = (1 + C19)^C19;$   $f(B) = (1 + D19)^D19;$ 

$$f(m) = (1 + E19)^E19;$$

Na terceira linha da Figura, que na planilha é linha 20, e nas colunas C e D, para o cálculo de A e B, tem-se as seguintes fórmulas:

Para se obter o valor de A, o valor da célula C20 é "=SE(I19>0;E19;C19)" e para se obter o valor de B, o valor da célula D20 é "=SE(I19<0;E19;D19)".

A expressão "=SE(I19>0;E19;C19)" quer dizer que se f(4)\*f(4,5), conteúdo da célula I19, for positivo, então o valor de A será igual a 4,5, que está na célula E19. Caso contrário, o valor será o mesmo, isto é, 4, que está em C19. De forma análoga, tem-se a expressão "=SE(I19<0;E19;D19)" para o caso do cálculo de B, com a diferença que o valor de m será atribuído a B se o valor f(A)\*f(m) for negativo e se for positivo, o valor será o mesmo, isto é, D19.

Uma vez colocada estas fórmulas, basta arrastar cada linha até que a diferença entre B e m seja menor que 0,01. Neste caso, o algoritmo poder-se-ia ter acabado na oitava linha. Porém, foi continuado para o leitor ter uma idéia do que acontece se o algoritmo continuar (tanto f(A) quanto f(B) assumem valores muito próximos de zero).

#### Método da Secante

Este método é uma variação do método de Newton-Raphson. Neste método, não se calcula a derivada da função, porém faz-se uma aproximação da derivada, por se calcular uma tangente que passa pelo ponto em estudo e o ponto anterior. Assim, como o método da bissecção, este método é bom para o caso de se ter uma derivada complexa ou ainda o leitor desconhecer como obtêla. Por outro lado, não é necessário encontrar o intervalo onde está a raiz, tal como é feito no método da Bissecção.

A fórmula geral para se obter uma raiz pelo método da Secante é dada por:

$$X(n+1) = Xn - \{ [Xn - X(n-1)] / [f(Xn) - f(X(n-1))] \}. f(Xn)$$

Observa-se que o são necessários dois pontos, Xn e X(n-1), para calcular o ponto X(n+1). Veja o exemplo da  $f(x) = 2000 - (x+1)^X$ . Suponha dois valores de para X, Xo = 4 e X1 = 5 e f(X0) = 1375 e f(X1) = -5776. Nesse caso, o ponto X2 é calculado da seguinte forma:

$$X2 = X1 - \{ [X1 - X0] / [f(X1) - f(X0)] \}. f(X1)$$
  
 $X2 = 1 - \{ [5 - 4] / [-5776 - 1375] \}. (-5776) = 4,19$ 

Analogamente, seguem os cálculos de X3 e X4.

$$X3 = 4,19 - \{ [4,19 - 5] / [1002,34 - (-5776)] \}.1002,34$$
  
= 4,31  
 $X4 = 4,31 - \{ [4,31 - 4,19] / [660,28 - 1002,34] \}.660,28$ 

X4 = 4,31 - { [ 4,31 - 4,19] / [660,28- 1002,34 ] }.660,28 = 4,54

Este processo continua até que os valores de  $Xn \in Xn + 1$  sejam muito próximos (diferença menor que 0,01, por exemplo) ou o valor de f(Xn + 1) seja muito próximo ou igual a zero. A Figura 2 ilustra o cálculo.

	А	В	С	D	E	F
1						
2		X(n-1)	Xn	f(X(n-1))	f(Xn)	X(n+1)
3		4	5	1375	-5776	4,19
4		5	4,19	-5776	1002,34	4,31
5		4,19	4,31	1002,34	660,28	4,54
6		4,31	4,54	660,28	-388,05	4,46
7		4,54	4,46	-388,05	74,53	4,47
8		4,46	4,47	74,53	6,78	4,47
9		4,47	4,47	6,78	-0,13	4,47
10		4,47	4,47	-0,13	0	4,47
11		4,47	4,47	0	0	4,47
12						

Figura 2. Cálculo de raiz através do método da Secante.

Da Figura 2, observa-se que na última linha, tem-se que  $Xn \in X(n+1)$  são iguais a 4,47, que é a raiz aproximada.

Para fazer os cálculos, tomando-se como referência a Figura 2, inicialmente inserem-se os dados 4 (célula B3) e 5 (célula C3) e faz-se os cálculos para as respectivas funções  $(2000-(1+B3)^*B3)$  na célula D3 e  $(2000-(1+C3)^*C3)$  na célula E3 e por fim a faz-se o cálculo de X(n+1), conforme fórmula da secante, a qual é dada no exemplo da Figura 49 da seguinte forma:  $= C3 - ((C3 - B3)/(E3 - D3))^*E3$ .

Após os cálculos feitos na linha 3, faz-se o seguinte na linha 4. A célula B4 recebe o valor da célula C3 (=C3). A célula C4 recebe o valor da célula F3 (=F3). Assim, arrastamse as células D3, E3 e F3 para a linha 4 e então é calculado o novo valor de X(n+1). Esse procedimento feito para a linha 4 é feito para as demais linhas até que os valores de X(n-1) e Xn sejam iguais ou então com uma diferença pequena |X(n-1)| - Xn | < erro, e o valor de erro pode ser tão pequeno quanto se desejar.

Existem outros métodos de se obter raízes, porém o Excel ou Calc podem ser usados para a resolução do problema. A dificuldade está em compreender o método a ser utilizado e como usar as fórmulas no Excel ou Calc. Porém, é muito mais fácil usar a planilha do que uma linguagem de programação.

Sobre o método da bissecção, que é bastante simples por não exigir o conhecimento da derivada da equação em questão, tem a desvantagem que pode exigir vários passos para a resolução (demora mais para convergir), porém, basta arrastar as células das primeiras linhas da resolução na planilha que a solução é obtida.

Sobre o método de Newton, este apresenta uma convergência mais rápida (menos passos para se obter a raiz),

porém exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão.

Sobre o método da Secante, este converge mais lentamente que o método de Newton, porém não exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão.

# Integração numérica

A integral de uma função f(x) definida no intervalo [a, b] equivale à área limitada pelas verticais x = a e x = b, pela curva de f(x) e pelo eixo horizontal.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = g(b) - g(a) = \text{área},$$

onde f(x) é a derivada de g(x) ou g(x) é a antiderivada de f(x).

A integração numérica é usada principalmente quando o cálculo da antiderivada é impossível ou algebricamente complexa, bem como nos casos em que não se conhece exatamente a função. Neste capítulo, serão estudados processos de cálculo de integrais definidas: regra do ponto médio, regra do trapézio e regra de Simpsom.

## Regra do ponto médio

Seja f(x) uma função não-negativa e contínua no intervalo [a, b]. A regra do trapézio consiste em dividir o intervalo [a, b] em "n" subintervalos de amplitude  $\Delta x = (b - a)/n$ 

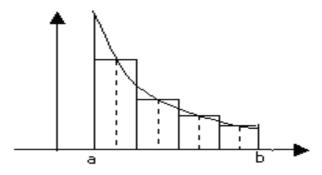


Figura 1. Integração pela regra do ponto médio.

Este método tem como base a dividir a área entre a curva e o eixo x em n retângulos, e cada retângulo tem área igual a base vezes a altura, e a base é igual a (b - a)/n e a altura é dado pelo valor da função y = f(r), e o valor de r, o qual pertence ao intervalo [a,b] é dado por pelo ponto médio do intervalo considerado (início e fim da base do retângulo, Figura 1).

Para facilitar o entendimento, seja a função f(x) = x, e suponha que se deseja saber o valor da integral entre os pontos x = 0 e x = 1. Suponha que seja dividido em 2 intervalos (n = 2). Assim, tem-se que:

$$\Delta x = (1 - 0)/2 = 0.50$$

a) intervalo de 0 a 0,50

Assim, área1 = 
$$0.50*0.25 = 0.125$$

b) intervalo de 0,50 a 1

f(0.25) = 0.25

$$f(0,75) = 0,75$$

Assim, área
$$2 = 0.50*0.75 = 0.375$$

Somando-se os valores de cada intervalo (área1 +área2), tem-se que o valor da integral é dado por 0.125 + 0.375 = 0.50

Este caso é simples e foi mostrado para entender o procedimento do método. Suponha o caso da função  $f(x) = x^2$ . Admita o intervalo de x variando de -1 a 1. Suponha que o intervalo seja dividido em 20 partes, para uma melhor aproximação. Neste caso,

$$\Delta x = (1 - (-1))/20 = 2/20 = 0.1$$

Assim, tem-se que o intervalo foi dividido em 20 retângulos, e cada um destes retângulos tem base igual a 0,1 e a altura é conforme o valor de f(r). Porém, calcular f(r) agora é mais difícil, visto que são 20 valores diferentes e cada valor de r tem um cálculo não muito fácil. Para isso será usado o Calc, da mesma forma que seria usado o Excel.

	C Soma	D	E	F
3		Tamanho do Intervalo =	0,1	
4	início do intervalo	x	f(x)	f(x)*intervalo
5	-1	-0,95	0,90	0,090
б	-0,9	-0,85	0,72	0,072
7	-0,8	-0,75	0,56	0,056
8	-0,7	-0,65	0,42	0,042
9	-0,6	-0,55	0,30	0,030
10	-0,5	-0,45	0,20	0,020
11	-0,4	-0,35	0,12	0,012
12	-0,3	-0,25	0,06	0,006
13	-0,2	-0,15	0.02	0,002
14	-0,1	-0,05	0,00	0,000
15	0	0,05	0,00	0,000
16	0,1	0,15	0,02	0,002
17	0,2	0,25	0,06	0,006
18	0,3	0,35	0.12	0,012
19	0,4	0,45	0,20	0,020
20	0,5	0,55	0,30	0,030
21	0,6	0,65	0,42	0,042
22	0,7	0,75	0,56	0,056
23	0,8	0,85	0,72	0,072
24	0,9	0,95	0,90	0,090

Figura 2. Cálculo das áreas que compõem a integral.

Na Figura 2 , na coluna C, linhas 5 a 25, tem-se o início de cada intervalo. Na coluna D tem-se o valor da metade do intervalo. Para exemplificar, o primeiro intervalo vai de -1 a -0,9. Assim, o valor de x, que é a metade do intervalo, é (-1 + -0,9)/2, que é igual a -0,95. Outra maneira de se calcular o x é somar o valor da célula C5 com 0,05 (0,1/2), que é a metade do tamanho do intervalo. Assim, para se calcular x, basta somar C5 com 0,05 e depois arrastar até a célula D24. Uma vez determinado o valor de x, que é o valor médio do intervalo, calcula-se o valor de f(x), usando-se a função f(x) =  $x^2$ . Para a célula E5, basta fazer "=D5\*D5". Feito isso, bastar arrastar a célula E5 até a célula E24 que serão calculados todos os valores de f(x). Na coluna F, na célula F5, bastar multiplicar f(x) por 0,1 e tem=se o valor da área do

retângulo. Assim, basta fazer esse cálculo na célula F5 e arrastar este valor até a célula F24. Feito isso, para se ter o valor da integral de -1 a 1, basta somar todos os valores de F5 a F25 que se terá o valor da integral. A Figura 3 ilustra o cálculo.

E	F
0,00	0,000
0,02	0,002
0,06	0,006
0,12	0,012
0,20	0,020
0,30	0,030
0,42	0,042
0,56	0,056
0,72	0,072
Total	0,58

Figura 3. Cálculo da integral (Ponto Médio).

A somatória de todos os valores de f(x)\*(tamanho do intervalo) é dado pela função soma(F5:F24), a qual resulta em 0,58, que é o valor aproximado da integral no intervalo de -1 a 1. Quanto mais divisões o intervalo [a,b] tiver (quanto maior o valor de n), mais próximo da solução exata estará este método, visto que assim a parte superior dos retângulos tenderão a coincidir com a curva f(x).

## Regra do trapézio

Tal como na regra do ponto médio, a regra do trapézio divide o intervalo [a,b] em n partes. Porém, em vez de considerar um retângulo, é considerado um trapézio. Para isso, a parte superior é considerada uma reta com uma inclinação não necessariamente nula, que tende mais ao contorno da curva f(x) do que uma reta horizontal (caso anterior, que seria a parte superior do retângulo.

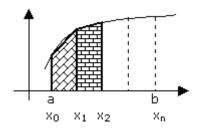


Figura 4. Cálculo da integral (regra do trapézio).

A área de um trapézio é dada por B.(H1 + H2)/2. Para exemplificar, na Figura 4, o trapézio compreendido entre e x1 tem B =  $(x_1 - x_0)$ ,  $H1 = f(x_0)$ ,  $H2 = f(x_1)$ . Os valores de H1 e H2 são as duas alturas do trapézio e B é a base do trapézio, conforme a Figura 4. A fórmula para este cálculo, para um dado trapézio, é dada por:

Área = 
$$(x_1 - x_0)$$
.  $(f(x_0) + f(x_1))/2$ 

Para exemplificar, veja a função anterior,  $f(x) = x^2$ . Admita o intervalo de x variando de -1 a 1. Suponha que o intervalo seja dividido em 20 partes, tal como no exemplo anterior. Neste caso,

$$\Delta x = (1 - (-1))/20 = 2/20 = 0,1$$

Vale a pena mencionar que  $(x_1 - x_0)$  é igual a 0,1. Portanto, a fórmula da área para um dado trapézio poderia ser resumida por:

Área = 
$$0,1$$
.  $(f(x_0) + f(x_1))/2$ 

Somando-se todas as áreas ter-se-ia:

Soma = 0,1. 
$$(f(x_0) + f(x_1))/2 + 0,1$$
.  $(f(x_1) + f(x_2))/2 + 0,1$ .  $(f(x_2) + f(x_3))/2 + ... + 0,1$ .  $(f(x_{19}) + f(x_{20}))/2$ 

Reescrevendo a soma, colocando 0,1 em evidência, tem-se que a soma das áreas é dada por:

Soma = 0,1.{ 
$$(f(x_0) + f(x_1))/2 + (f(x_1) + f(x_2))/2 + (f(x_2) + f(x_3))/2 + ... + (f(x_{19}) + f(x_{20}))/2 }$$

A Figura 5 ilustra o cálculo da integral de  $f(x) = x^2$ .

	С	D	Е	F	G
2					
3	XO	X1	f(X0)	f(X1)	Área
4					
5	-1	-0,9	1	0,81	0,0905
6	-0,9	-0,8	0,81	0,64	0,0725
7	-0,8	-0,7	0,64	0,49	0,0565
8	-0,7	-0,6	0,49	0,36	0,0425
9	-0,6	-0,5	0,36	0,25	0,0305
10	-0,5	-0,4	0,25	0,16	0,0205
11	-0,4	-0,3	0,16	0,09	0,0125
12	-0,3	-0,2	0,09	0,04	0,0065
13	-0,2	-0,1	0,04	0,01	0,0025
14	-0,1	0	0,01	0	0,0005
15	0	0,1	0	0,01	0,0005
16	0,1	0,2	0,01	0,04	0,0025
17	0,2	0,3	0,04	0,09	0,0065
18	0,3	0,4	0,09	0,16	0,0125
19	0,4	0,5	0,16	0,25	0,0205
20	0,5	0,6	0,25	0,36	0,0305
21	0,6	0,7	0,36	0,49	0,0425
22	0,7	0,8	0,49	0,64	0,0565
23	0,8	0,9	0,64	0,81	0,0725
24	0,9	1	0,81	1	0,0905
25				Total	0,67

**Figura 5.** Cálculo da integral de  $f(x) = x^2$  (Trapézio).

Conforme o exemplo dado e a Figura 5, para o cálculo da integral de  $f(x) = x^2$ , que seria a somatória de todas as áreas dos n intervalos, as colunas C e D, linhas 5 a 24, contém os valores

de início e final de intervalo. As colunas E e F, linhas 5 a 25, tem os respectivos valores para a função  $f(x) = x^2$ . A coluna G contém a área de cada um dos n intervalos, calculada conforme a fórmula dada anteriormente  $(0,1.(f(x_s) + f(x_r))/2$ , e  $x_s$  e  $x_r$  são os valores de x para o intervalo considerado).

Uma vez feito o cálculo de cada área, basta somar todas as áreas. Observa-se que o valor obtido é 0,67. Este valor é diferente do que foi obtido pela regra do ponto médio, que foi 0,58. Isso se dá por que para esta função, a regra do trapézio fez uma melhor aproximação, devido ao fato que a parte superior do trapézio se aproximou mais da curva do que a parte superior do retângulo, que é uma reta horizontal. Porém, tal como foi dito anteriormente, se o número de intervalos n fosse maior, o valor obtido pela regra do ponto médio seria maior (o erro seria menor). Para esta função  $(f(x) = x^2)$ , o valor exato da integral para o intervalo -1 a 1 é 2/3 ou 0,6667.

## Regra de Simpsom

A regra de Simpson, para uma dada função f(x), calcula a integral da seguinte forma:

Integral de 
$$f(x) = [(b - a)/3n].[f(x_0) + 4.f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 2.f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Observe que os coeficientes de  $f(x_i)$  são: 1, 2, 4, 2, 4, ..., 4, 2, 4, 1.

Para o caso do exemplo de  $f(x) = x^2$ , para n = 20, o valor da integral seria:

Integral de 
$$f(x) = [(1 - (-1))/3*20]*[f(-1) + 4.f(-0.9) + 2f(-0.8) + 4f(-0.7) + ... + 2.f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]$$

Integral de 
$$f(x) = [2/60] * [1 + 3,64 + 1,28 + 1,96 + .... + 1,28 + 3,64 + 1] = 0,666666667$$

Este valor foi calculado usando-se o Excel, e a Figura 6 ilustra o cálculo. Observa-se que o valor atingiu valor exato (2/3).

No exemplo descrito na Figura 6, foram inseridos a coluna C com os valores de x, para posterior cálculo de f(x), que está na coluna D, e também os fatores de multiplicação da função (1,4,2,...2,4,1) e a soma de todos os componentes pertencentes a esta série e então multiplicados por (2/60). De certa forma, são cálculos simples, e que dão o valor da integral com boa precisão.

	F26 ▼ ( f <sub>x</sub> =(2/60)*SOMA(F5:F25)						
	В	С	D	Е	F		
3		XO	f(X0)	fator	fator*f(X0)		
4							
5		-1	1	1	1		
6		-0,9	0,81	4	3,24		
7		-0,8	0,64	2	1,28		
8		-0,7	0,49	4	1,96		
9		-0,6	0,36	2	0,72		
10		-0,5	0,25	4	1		
11		-0,4	0,16	2	0,32		
12		-0,3	0,09	4	0,36		
13		-0,2	0,04	2	0,08		
14		-0,1	0,01	4	0,04		
15		0	0	2	0		
16		0,1	0,01	4	0,04		
17		0,2	0,04	2	0,08		
18		0,3	0,09	4	0,36		
19		0,4	0,16	2	0,32		
20		0,5	0,25	4	1		
21		0,6	0,36	2	0,72		
22		0,7	0,49	4	1,96		
23		0,8	0,64	2	1,28		
24		0,9	0,81	4	3,24		
25		1	1	1	1		
26				Total	0,666666667		

**Figura 6.** Cálculo da integral de  $f(x) = x^2$  (Simpson).

## Problemas de Programação Linear (PPL)

Neste capítulo será enfocado o *software* Solver para a resolução de problemas de programação linear (PPL). O *software* Solver foi feito por Frontline Systems, Inc e tem versões para o Calc e Excel. Mais informações podem ser vistas em www.frontsys.com.

Serão mostrados alguns problemas de PPL e como resolver os mesmos usando o Solver. Vale a pena mencionar que montar o PPL, em alguns casos, é muito mais difícil do que usar o Solver, que após alguns exercícios ficará extremamente simples o entendimento de como usar este *software*.

## Introdução a PPL

São problemas que envolvem duas ou mais variáveis e procura-se maximizar ou minimizar algum fator (lucro, custos, etc.). Existe uma função de maximização (ou minimização) e existem uma ou mais restrições envolvendo as variáveis que são usadas na função de maximização minimização. Para exemplificar um problema de PPL, suponha que se deseja minimizar o custo ao se manter duas máquinas ligadas para a produção de parafusos e pregos. Cada uma das máguinas produz quantidades diferentes de pregos e parafusos. Sejam A e B essas máguinas. A máguina A produz, por hora, 100 caixas de pregos e 40 caixas de parafusos. A máquina B produz, por hora, 50 caixas de pregos e 70 de parafusos. Suponha que as duas juntas devem produzir por dia pelo menos 500 caixas de parafusos e 500 caixas de pregos.

Matematicamente, supondo que a máquina A trabalhe x horas e a máquina B, y horas, tem-se as seguintes restrições:

 $x.100 + y.50 \ge 500$  (as máquinas A e B produzem pelo menos 500 caixas de prego).

 $x.40 + y.70 \ge 500$  (as máquinas A e B produzem pelo menos 500 caixas de parafusos).

Existe uma despesa em manter estas máquinas ligadas e esta despesa é por hora. Admita que a máquina A consuma 2 reais por hora de energia e a máquina B, 3 reais por hora. Assim, a função objetivo, que visa a minimizar o gasto de energia, mantendo o valor mínimo de produção, é igual a:

$$F(x, y) = z = minimizar x.2 + y.3$$

A função F(x,y) = z é chamada de função objetivo e esta é usada para se obter o valor de gasto diário mínimo de forma a manter a produção. No caso, 2.x + 3.y é igual ao gasto diário, visto que é o produto do tempo que cada máquina fica ligada pelo valor da hora de trabalho de cada máquina.

Uma outra restrição é que ou a máquina trabalha, ou fica parada. Isso significa:

$$x \ge 0$$
 e  $y \ge 0$ 

Assim, o PPL para este problema é igual a:

Z = minimizar 2.x + 3.ySujeito as restrições  $x.100 + y.50 \ge 500$  $x.40 + y.70 \ge 500$  $x \ge 0 \text{ e } y \ge 0$ 

Este problema é linear por que as variáveis envolvidas, no caso x e y, são lineares (potência igual a 1 para cada variável). Este problema é possível resolver graficamente, visto que só tem

duas variáveis envolvidas, ou por métodos computacionais. Um método computacional que pode ser utilizado é o Solver, presente nos aplicativos Excel e Calc.

# Resolução de PPL com Solver

Solver é um módulo do Calc (ou Excel) que permite resolver problemas de programação linear e alguns casos de programação não linear. Para facilitar o entendimento de como usar o Solver, veja o PPL anterior:

Z =	minimizar	2.x + 3.y
Sujeito as	s restrições	$x.100 + y.50 \ge 500$
		$x.40 + y.70 \ge 500$
		$x \ge 0$ e $y \ge 0$

₩ Se	m título 1 - BrOf	fice.org Calc			
<u>A</u> rquiv	o <u>E</u> ditar E <u>x</u> ibir <u>I</u>	nserir <u>F</u> ormatar Fe <u>r</u> rament	as <u>D</u> ados <u>J</u> anela <i>i</i>	A <u>ju</u> da	
<b>a</b>	- 👺 📙 👒 🛚	🕜   뎚 🖺 🕓   🕸 🖪	BC   📈 🖺 🛍 →	<b>∅</b>   🖱 • @ •	📵 🐧 👢   🔟
9.	Arial	▼ 10 <b>▼</b> N	I / S   ≣ ≡	<b>■</b> ■   •	<u>\$</u> % \$ \$ 000 000 €
⊂14	~	<i>f</i> x ∑ =			
	А	В	С	D	E
1					
2			X	Υ	Lado direito
3					
4		Função Objetivo	2	3	
5					
6		Restrições	100	60	500
7			40	70	500
8					
9		X =			
10		Y =			
11		Resultado	0		
12		Restrição 1	0		
13		restrição 2	0		
14					

Figura 1. Montagem do problema na planilha.

A Figura 1 acima mostra os coeficientes da função objetivo e restrições do PPL. Estes coeficientes serão usados pelo Solver, que será exemplificado a seguir.

O Solver pode ser acessado da seguinte forma no Calc (opção "Ferramentas"), conforme a Figura 2.



Figura 2. Solver, montagem do problema.

A Figura 2 mostra algumas células nas quais os cálculos são feitos. A celular \$C\$11, a qual é inserida em "célula de destino", representa a função objetivo e está tem o cálculo de 2.x + 3.y, ou seja, "=\$C\$4\*\$C\$9 + \$D\$4\*\$C\$10". O item é otimizado para "Mínimo" e as células a serem alteradas, x e y, são representadas por \$C\$9 e \$C\$10 respectivamente. Com respeito a condições limitantes, ou seja, as restrições, tem se que:

```
$C$12 ≥ $E$6 representa  $C$4*$C$9 + $D$4*$C$10 ≥ 500 $C$13 ≥ $E$7 representa  $C$5*$C$9 + $D$5*$C$10 ≥ 500
```

C 0 0 representa 0 0 0 0 0 0 representa 0 0 0

Outras restrições que não estão na Figura 2 e estão na Figura 3, são:

\$C\$9 Inteiro representa - x é inteiro\$C\$10 Inteiro representa - y é inteiro

Observe que se x e y não fossem inteiros, ou seja, números reais e positivos, o valor da função objetivo seria outro (z = 21,74 e x = 1,09 e y = 6,52).

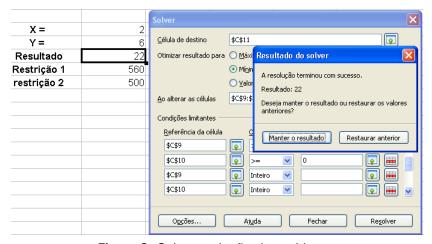


Figura 3. Solver, solução do problema.

Da Figura 3, tem-se os valores finais de X e Y (x = 2 e y = 6), o resultado igual a 22 (função objetivo) e o valor de cada lado esquerdo da restrição (560 cada um).

Para o caso de usar o Excel, caso não exista o Solver, devese procurar a opção "Suplementos" e então "Solver" e instalar (basta clicar em OK). Em seguida, após instalar o Solver, este, ao ser chamado, irá ter a tela mostrada na Figura 4.

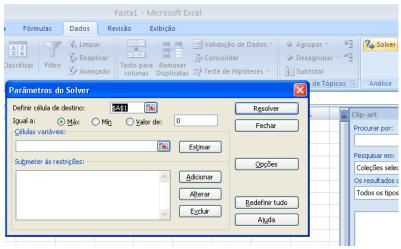


Figura 4. Solver a partir da planilha Excel.

A partir daí, faz-se o mesmo procedimento que foi feito para o Calc, conforme mostrado anteriormente.

Para ficar mais claro, veja outro exemplo. Um fabricante deseja maximizar a receita bruta de venda de seus produtos que são dois tipos de ligas: A e B. Cada liga é composta por cobre, zinco e chumbo. A liga A é composta por 2 kg de cobre, 1 kg de zinco e 1 kg de chumbo. A liga B, por sua vez, é composta por 1 kg de cobre, 2 kg de zinco e 3 kg de chumbo. Veja a Tabela 1, que resume o estoque dos produtos.

**Tabela 1.** Tipo de ligas *versus* preço.

Item	Liga tipo A (kg) Liga tipo B (kg)		Matéria Prima Disponível (kg)
Cobre	2	1	16
Zinco	1	2	11
Chumbo	1	3	15
Preço de venda	R\$ 30	R\$ 50	

Da Tabela 1, tem-se que a liga tipo A tem 2 Kg de cobre, e a liga tipo B, 1 Kg de cobre. O Estoque de cobre é de 16 kg. Analogamente, o estoque de zinco é de 11 kg e o estoque de chumbo é de 15 kg. Cada liga do tipo A custa R\$ 30 e cada liga do tipo B custa R\$ 50.

Para resolver esse problema de maximização de receita bruta de venda, isto é, qual a o lucro máximo que se pode ter ao fazer as barras A e B, com as limitações de estoque, monta-se um conjunto de equações, ao qual se dá o nome de PPL (Problema de Programação Linear).

O que se deseja é maximizar o lucro da venda. Seja a função Z a ser maximizada, tal que:

$$Z = 30Xa + 50Xb$$
.

Na equação acima, Xa é a quantidade de liga tipo A e Xb, a quantidade de liga tipo B. Este problema tem restrições quanto a estoque, isto é,

$$2Xa + Xb \le 16$$
 (para o cobre)  
 $Xa + 2Xb \le 11$  (para o zinco)  
 $Xa + 3Xb \le 15$  (para o chumbo)  
 $Xa > 0$  e  $Xb > 0$ .

Assim, matematicamente, tem-se o seguinte PPL:

Maximizar Z = 
$$30Xa + 50Xb$$
  
Sujeito a  $2Xa + Xb <= 16$   
 $Xa + 2Xb <= 11$   
 $Xa + 3Xb <= 15$   
 $Xa >= 0 e Xb >= 0$ 

Para resolver este problema, pode-se usar o Solver. O Solver pode ser acessado da seguinte forma no Calc (opção "Ferramentas"), conforme a Figura 5.

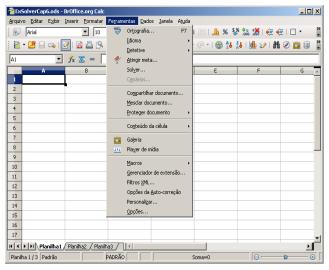


Figura 5. Solver, como acessar.

Ao se acionar a opção Solver, em Ferramentas, vai aparecer uma tela conforme exemplifica a Figura 6.



Figura 6. Solver, Campos para preenchimento de dados.

Para usar o Solver, inicialmente deve-se inserir uma tabela no Calc com os dados e estes então serão carregados no Solver. Os dados ficarão da seguinte forma:

	SolverCap6.ods - vo Editar Exibir		Ferramentas <u>D</u> ad	os Janela Ajuda			_   ×
90	Arial	<b>V</b> 10	▼ N I S	E E E E	⊞ I Ֆ % 💝	% 器   电电	-
	- 28 🗎 🐃 🛭	21881	^\$ ∧\$   >< ®±	m - 0   5 - 0	@ +   @ A A	11 11 12 111	000
	V	Jx ∑ =					
	A	В	С	D	E	F	G A
1	ltem	Liga tipo A (kg)	Liga tipo B (kg)	Matéria Prima Disponível (kg)			
2	Cobre	2	1	16			
3	Zinco	1	2	11			
4	Chumbo	1	3	15			-
5	Preço de venda	R\$ 30,00	R\$ 50,00				
6 7	Xa	Xb		E1	0		
8	0	0		E2	0		
9				E3	0		
10 11 12	Resultado	R\$ 0,00					
4 4		lanilha2 / Planilha3					F

Figura 7. Dados iniciais para preenchimentos dos campos do solver.

Na Figura 7, a célula B11 é a função objetivo Z = 30Xa + 50Xb, e tem equação:

$$B11 = B5*A8 + C5*B8,$$

Nesta equação, a Célula A8 e a célula B8 são os valores de Xa e Xb, respectivamente, com valor inicial igual a zero.

As células E7, E8 e E9 têm as seguintes equações:

- E7 = B2\*A8 + C2\*B8. Esta representa a soma 2Xa + Xb.
- E8 = B3\*A8 + C3\*B8. Esta representa a soma Xa + 2Xb.

 E a célula E9 = B4\*A8 + C4\*B8, que representa a soma Xa + 3Xb.

Após inseridos estes valores, o formulário de entrada do Solver ficará conforme a Figura 8.



Figura 8. Solver com os dados iniciais para a solução do problema.

Se ativar o botão "Resolver", o Solver calcula a solução ótima deste problema, isto é, a melhor solução possível. Os valores obtidos para Xa e Xb são 7.0 e 2.0 respectivamente. Com isso, a função Z=30Xa+50Xb teve valor igual a 310. Neste caso, os valores de Xa e Xb são reais.

Caso se deseje que os valores de Xa e Xb sejam inteiros, faz-se necessário inserir essa restrição, que é feita através do botão "Opções". Levando-se em conta o problema anterior, temse a Figura 9 que ilustra as opções para inteiro (assumir variáveis como inteiras) e valores positivos (assumir variáveis como não negativas).



Figura 9. Escolha de opção para solução ser inteira.

Com esses dados iniciais, é chamado o Solver para resolver o problema em questão. Observe que a solução é inteira. Após ativar o botão "Resolver", vai aparecer o seguinte resultado: Xa = 7, Xb = 2 e Z = 310 (Figura 10).

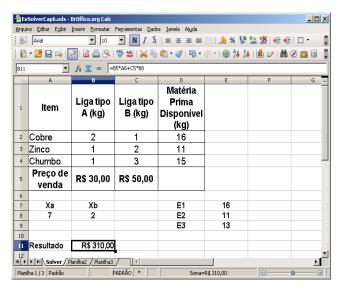


Figura 10. Resultado do Solver.

Assim, o Solver pode calcular soluções reais ou inteiras, conforme as restrições impostas pelo Problema de Programação Linear.

Embora os exemplos mostrados anteriormente tenham apenas duas variáveis, o Solver pode ser usado para a resolução de problemas de muitas variáveis.

## Problemas de Programação Não Linear

Neste capítulo será enfocado o *software* Solver para a resolução de problemas de programação não linear (PPNL). Os exemplos serão mostrados usando o Excel. A maneira de resolver é simples, análogo ao que foi feito para PPL.

Conforme visto anteriormente, um PPL tem variáveis com expoente igual a 1, seja a função objetivo ou sejam as restrições. Um PPNL tem pelo menos uma variável com expoente diferente de 1.

## Resolução de PPNL com Solver

Para exemplificar a resolução de um PPNL usando-se o Solver, veja o problema a seguir. Seja um gerente ou responsável por compras tal que este deseja o número ótimo de unidades de um determinado produto a serem compradas para então negociar o mesmo quando um pedido de venda deste produto for recebido. Este problema admite duas hipóteses:

- 1 a demanda pelo produto é mais ou menos constante durante o ano.
- 2 cada novo pedido de compra de um dado produto é entregue quando o estoque o atinge o nível zero.

Para ficar mais claro, suponha que se tenha um estoque médio de 150 unidades de um dado produto por ano. Suponha também que cada pedido de compra da empresa por estes produtos sejam de 50 unidades. Assim, a empresa teria que fazer 3 pedidos de compra por ano. O custo de manter este estoque de 50 seria X. Suponha agora que a empresa comprasse 25 unidades

do produto por vez. Assim, seriam necessários 6 compras durante o ano e o custo de manter este estoque de 25 unidades seria Y. Assume-se que o custo X é maior que o custo Y (quanto mais itens para manter, mais cara fica a manutenção). Desta forma, a quantidade de itens comprados influencia no custo de manutenção do estoque. O custo total de se manter um estoque é dado por:

$$D.C + D.S/Q + Q.Ci.C/2$$

Nesta fórmula, D representa a demanda anual de vendas por este item na empresa, C representa o custo unitário de compra do produto por item, S representa o custo fixo de fazer um pedido de compra e Q representa a quantidade do produto a ser comprada em cada pedido, e Ci.C representa o custo de manter uma unidade no estoque por ano (Ci expresso como uma porcentagem de C). Assim, D.C representa o custo de compra anual, D.S/Q representa o custo fixo de se fazer todos os pedidos de compra (D/Q representa o número de pedidos de compra de um dado item por ano), Q/2 representa a média de unidades mantidas no estoque por ano e assim, o custo médio de manter o estoque seria Q.Ci.C/2.

O que se deseja é minimizar o custo total anual com a compra de produtos e o custo com a manutenção do estoque e os custos fixos. Uma vez que se sabe o que significa cada variável, sejam os valores a seguir para se determinar o valor de Q que minimiza o valor do custo total. Visto que o valor de Q está no denominador de D.S/Q, então este é um problema não linear (o expoente de Q neste caso seria -1) e uma restrição deste problema é que Q > = 1. Assim, tem-se o seguinte problema de PPNL:

Minimizar 
$$Z = D.C + D.S/Q + Q.Ci.C/2$$
  
Sujeito a  $Q > = 1$ 

Para a resolução deste problema, vejam as considerações de valores a seguir:

Demanda anual (D): 24.000 Custo por unidade (C): R\$ 35 Custo fixo por compra (S): R\$ 50

Custo de manter uma unidade no estoque (Ci): 18%

Quantidade a de itens a ser comprada por vez: variável a ser

determinada (Q). Seja o valor inicial igual a 1. Assim,

Quantidade comprada (Q) = 1

Custo de compra (C.D): R\$ 840000 Custo de requisição (D.S/Q): R\$ 200

Custo de manutenção do estoque (Q.Ci.C/2): R\$ 3,15

A Figura 1 ilustra o cálculo inicial de Q e os valores iniciais de cada célula (E6 a E16). Para este exemplo, será usado o Excel.

	Α	В	С	D	Е
1					
2					
3					
4					
5					
6				demanda anual	24000
7				custo por unidade	35
8				custo por pedido	50
9				taxa	18,00%
10					
11				quantidade comprada	1
12					
13				Custo de compra	840000
14				Custo de requisição	1200000
15				custo de inventário	3,15
16				total	2040003,15
17					

Figura 1. Valor inicial de Q.

Para determinar o valor de Q tal que minimize o valor do custo anual, deve-se utilizar o Solver. A Figura 2 ilustra como fazer.

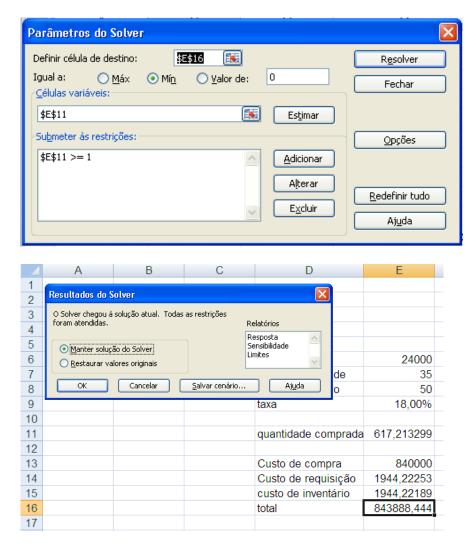


Figura 2. Resultado do Solver para o PPNL.

Observe que o resultado foi Q = 617,21. Como o valor de Q deve ser inteiro, basta fazer a modificação descrita na Figura 3.

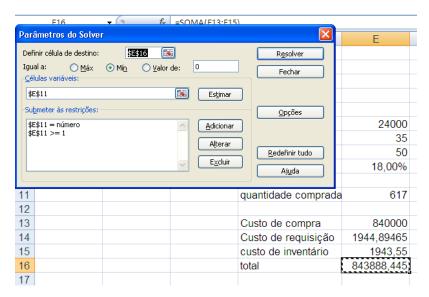


Figura 3. Resultado do Solver para o PPNL para Q inteiro.

Vale a pena mencionar que a expressão do custo total, D.C + D.S/Q + Q.Ci/2, está descrita nas células E13 a E16 da seguinte forma

Custo de compra: E7\*E6

Custo de requisição: E6\*E8/E11 Custo do inventário: E11\*E9/2

Total: soma(E13:E15)

O valor a ser variado foi E11 e assim, o Solver resolveu este problema, isto é, o valor de Q que minimiza o valor da compra total é 617. Desta forma, se for compradas caixas com 617 itens do produto, serão necessárias aproximadamente 39 pedidos de compra (24000/617).

Um outro exemplo de problema de PPNL é sobre localização. Imagine que se deseja construir um hospital ou uma escola ou um supermercado ou uma nova cidade o mais próximo possível de 4 cidades já existentes. Sejam A, B, C e D essas cidades e sejam X e Y as coordenadas geográficas (eixo XY) dessas cidades. Seja F uma nova cidade que se deseja construir e que seja o mais próximo possível das demais cidades A, B, C e D. A distância de F às demais cidades é dada por:

Distância = distância A-F + distância B-F + distância C-F + distância D-F

Seja o ponto Xf e Yf as coordenadas da cidade F e sejam Xa e Ya as coordenadas da cidade A. Para exemplificar como calcular a distância entre A e F, distância A-F, basta usar a função RAIZ, e a fórmula de calcular é dada por:

Raiz( 
$$(Xf - Xa) * (Xf - Xa) + (Yf - Ya) * (Yf - Ya)$$
)

Observe que existe uma soma de quadrados e também logo a seguir o cálculo de uma raiz, o que não é linear. Assim, é um PPNL. A soma de todas das distâncias de F às demais cidades é dada por:

Distância = Raiz( 
$$(Xf - Xa)^* (Xf - Xa) + (Yf - Ya)^* (Yf - Ya)$$
) + Raiz(  $(Xf - Xb)^* (Xf - Xb) + (Yf - Yb)^* (Yf - Yb)$ ) + Raiz(  $(Xf - Xc)^* (Xf - Xc) + (Yf - Yc)^* (Yf - Yc)$ ) + Raiz(  $(Xf - Xd)^* (Xf - Xd) + (Yf - Yd)^* (Yf - Yd)$ )

A Figura 4 ilustra o cálculo inicial das distâncias de F a cada cidade (supondo valores iniciais para Xf e Yf iguais a zero). A distância total é dada na célula F12 como a somas das demais distâncias das cidades A, B, C e D à cidade F.

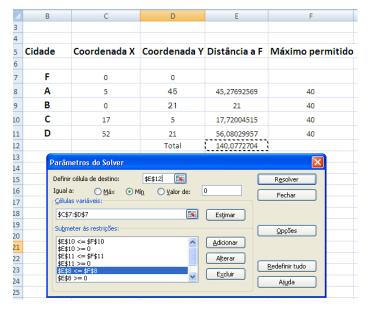


Figura 4. Distâncias das cidades A, B, C e D a F.

Observe que na Figura 4, tem-se as restrições de distâncias de A, B, C ou D a F, que são 40 unidades de distância no máximo, e também o fato da distância ser diferente de zero, para que F não seja localizado em uma das cidades (A, B, C e D).

Para resolver este problema, é usado o Solver, o qual tem o seguinte PPNL:

#### Sujeito a

Raiz( 
$$(Xf - Xa)^* (Xf - Xa) + (Yf - Ya)^* (Yf - Ya)) < = 40$$
  
Raiz(  $(Xf - Xb)^* (Xf - Xb) + (Yf - Yb)^* (Yf - Yb)) < = 40$ 

```
Raiz( (Xf - Xc)^* (Xf - Xc) + (Yf - Yc)^* (Yf - Yc)) <= 40

Raiz( (Xf - Xd)^* (Xf - Xd) + (Yf - Yd)^* (Yf - Yd)) <= 40

Raiz( (Xf - Xa)^* (Xf - Xa) + (Yf - Ya)^* (Yf - Ya)) > 0

Raiz( (Xf - Xb)^* (Xf - Xb) + (Yf - Yb)^* (Yf - Yb)) > 0

Raiz( (Xf - Xc)^* (Xf - Xc) + (Yf - Yc)^* (Yf - Yc)) > 0

Raiz( (Xf - Xd)^* (Xf - Xd) + (Yf - Yd)^* (Yf - Yd)) > 0
```

Observe que as restrições também não são lineares. A Figura 4 mostra como estas restrições são definidas no Solver, e também o os valores que devem variar (C7 e D7). Após executar o Solver, tem-se o resultado mostrado pela Figura 5.

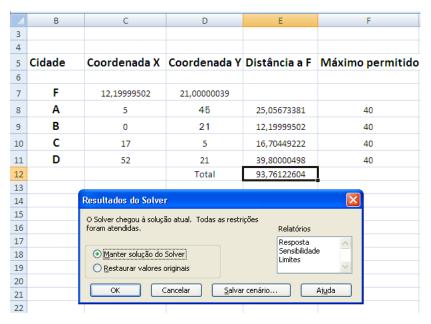


Figura 5. Resultado final das distâncias de F às cidades.

O valor final foi 93,76 e as coordenas Xf = 12,2 e Yf = 21. Este exemplo pode ser usado para outros tipos de problemas de localização. Por exemplo, se A, B, C e D fossem bairros e F

fosse um local onde instalar uma padaria ou um restaurante ou uma escola, então o procedimento seria tal como foi feito para se localizar uma nova cidade.

## Considerações sobre PPNL

Há casos que estes tipos de problemas não possuem uma restrição. Por exemplo, se o leitor quiser calcular o valor máximo de uma expressão do tipo:

$$y(x) = -x^2 + 2x$$
, para x real, teria qual valor de máximo?

Para isso, bastaria o leitor definir o valor de x em uma célula, a expressão de y(x) em uma outra célula, chamar o Solver, e então definir a célula destino (valor de y(x)) e a célula variável (valor de x) que o resultado seria x=1 e y(x)=1. Fica a título de exercício para o leitor resolver este problema. Generalizando, qualquer problema de Máximo ou Mínimo de uma função de uma ou mais variáveis pode ser resolvido pelo Solver.

#### Referências

BrOffice. As Origens do BrOffice.org: o StarOffice e o OpenOffice.org. Disponível em:

<a href="http://www.broffice.org/sobre">http://www.broffice.org/sobre</a>. Acesso em: 30 nov. 2010.

ESTATÍSTICA. Disponível em:

<a href="http://pt.wikipedia.org/wiki/Estatística">http://pt.wikipedia.org/wiki/Estatística</a>. Acesso em: 30 nov. 2009.

MICROSOFT. Disponível em: <a href="http://www.microsoft.com">http://www.microsoft.com</a>>. Acesso em: 30 nov. 2010.

OpenOffice.org. Disponível em:

<a href="http://pt.wikipedia.org/wiki/OpenOffice.org">http://pt.wikipedia.org/wiki/OpenOffice.org</a>. Acesso em: 30 nov. 2010.

Este livro aborda o uso de planilhas (Calc ou Excel) para a resolução de alguns problemas de Cálculo Numérico (CN) e Pesquisa Operacional (PO). Não é motivação deste livro mostrar todos os tópicos relativos a CN e PO, visto que são muitos, mas mostrar como usar uma planilha para resolver alguns dos principais problemas. Com os exemplos deste livro, o leitor poderá resolver outros tipos de problemas de PO ou CN ou da Matemática em geral, visto que estará então familiarizado com a forma de resolução desses usando Calc ou Excel.

O Cálculo Numérico é usado em várias situações da Matemática, Física, Engenharia e várias outras áreas das ciências exatas. O mesmo pode ser dito com relação à Pesquisa Operacional, que pode ainda ser aplicada a problemas de administração de empresas, logística, problemas de cortes em geral (chapa de vidro, aço, alumínio, etc.) e muitos outros problemas, com intuito de reduzir perdas e custos (problemas de minimização) e aumento de lucro ou rendimento (problemas de maximização).

Para a resolução de alguns dos principais problemas de CN e PO, são usadas funções (Matemática, Estatística, Lógica e Matriciais) e gráficos, os quais são abordados nos três primeiros capítulos deste livro. Esses capítulos serão a base para a resolução dos problemas de CN e PO. O Solver, aplicativo para resolver problemas de programação linear (PPL) e alguns problemas de programação não linear é enfocado, com exemplos, e também é muito útil para ser usado em diversas situações e áreas (Administração, Engenharia, Medicina, etc.).

Este livro não requer conhecimento avançado sobre Calc (ou Excel) para a compreensão dos tópicos e tem diversos exemplos com figuras, facilitando o entendimento. Dessa forma, este livro é recomendado para um público variado, necessitando apenas de uma noção sobre planilhas.



