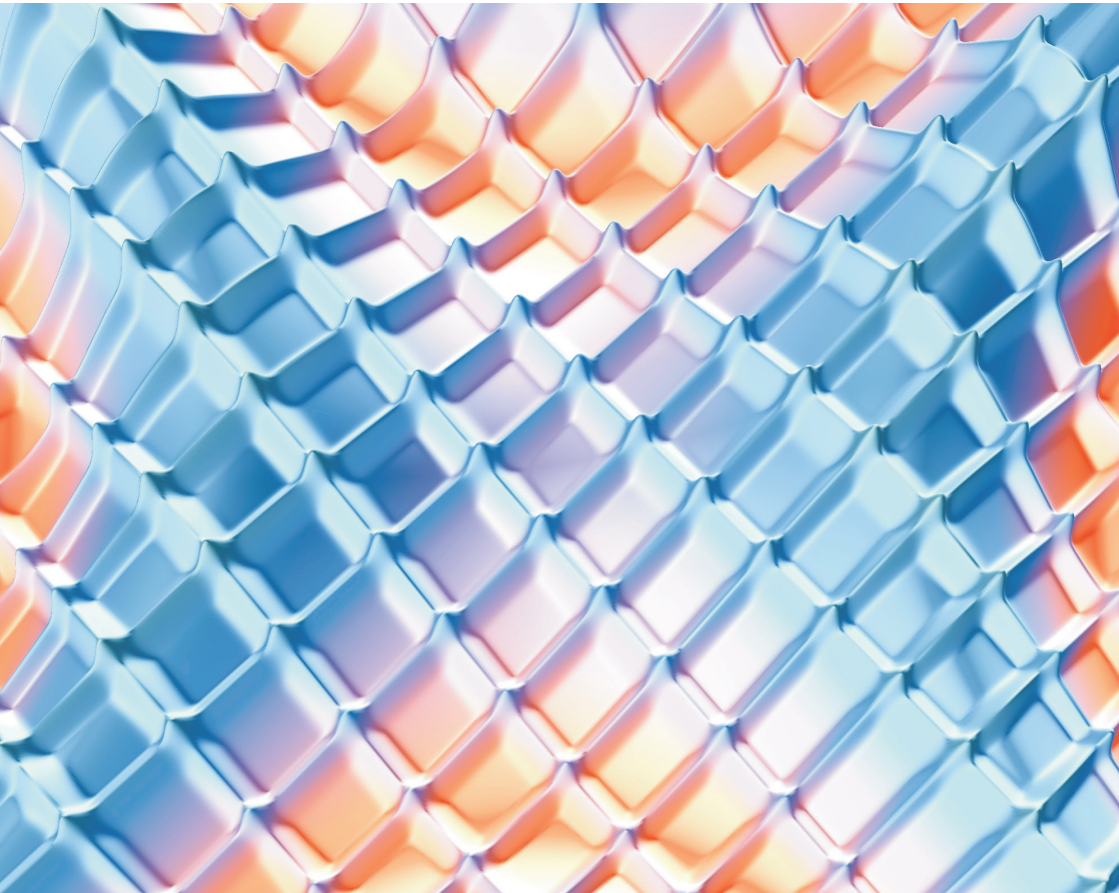


## Dinâmica não-linear em sistemas hidrológicos



*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária  
Embrapa Informática Agropecuária  
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento*

# ***Documentos 108***

## **Dinâmica não-linear em sistemas hidrológicos**

*Alexandre de Castro*

Embrapa Informática Agropecuária  
Campinas, SP  
2010

## **Embrapa Informática Agropecuária**

Av. André Tosello, 209 - Barão Geraldo  
Caixa Postal 6041 - 13083-886 - Campinas, SP  
Fone: (19) 3211-5700 - Fax: (19) 3211-5754  
www.cnptia.embrapa.br  
sac@cnptia.embrapa.br

### **Comitê de Publicações**

Presidente: *Silvia Maria Fonseca Silveira Massruhá*

Membros: *Poliana Fernanda Giachetto, Roberto Hiroshi Higa, Stanley Robson de Medeiros Oliveira, Maria Goretti Gurgel Praxedes, Adriana Farah Gonzalez, Neide Makiko Furukawa*

Membros suplentes: *Alexandre de Castro, Fernando Attique Máximo, Paula Regina Kuser Falcão*

Supervisor editorial: *Neide Makiko Furukawa*

Revisor de texto: *Adriana Farah Gonzalez*

Normalização bibliográfica: *Maria Goretti Gurgel Praxedes*

Editoração eletrônica: *Suzi Carneiro/Neide Makiko Furukawa*

Fotos da capa: *Imagens livres disponíveis em <<http://www.stock.schng>>*

Secretária: *Carla Cristiane Osawa*

### **1ª edição on-line 2010**

#### **Todos os direitos reservados.**

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei no 9.610).

#### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) Embrapa Informática Agropecuária**

---

Castro, Alexandre de.

Dinâmica não-linear em sistemas hidrológicos / Alexandre Castro. -  
Campinas : Embrapa Informática Agropecuária, 2010.

17 p. : il. - (Documentos / Embrapa Informática Agropecuária; ISSN  
1677-9274, 108).

1. Sistemas hidrológicos. 2. Dinâmica não-linear. 3. Mapas acoplados. I.  
Título. II. Série.

004.0151 CDD (21. ed.).

---

© Embrapa 2010

# Autor

## **Alexandre de Castro**

Doutor em Ciências

Pesquisador da Embrapa Informática Agropecuária

Av. André Tosello, 209, Barão Geraldo

Caixa Postal 6041 - 13083-970 - Campinas, SP

Telefone: (19) 3211-5859

e-mail: [acastro@cnptia.embrapa.br](mailto:acastro@cnptia.embrapa.br)



# Apresentação

No Brasil, ainda existem regiões onde séries históricas de dados hidrológicos são bastante reduzidas ou até mesmo inexistentes, devido aos elevados custos de implantação, operação e manutenção de redes hidrométricas, principalmente em grandes bacias hidrográficas.

A necessidade de se estimar a médio e longo prazo as vazões máximas, médias e mínimas em áreas com carência de dados hidrológicos é de grande importância para o planejamento hídrico na agricultura.

Neste Documento, é apresentado um modelo teórico não linear para algumas variáveis hidrológicas, mutuamente dependentes e descritas por meio de uma rede de mapas acoplados. O estudo apresentado neste trabalho está baseado na substituição das equações diferenciais usuais por um modelo equivalente, entretanto, com evolução temporal discreta e variável de estado contínua, o que pode ser particularmente útil para investigar aumento de eficiência computacional em simulações hidrológicas.

***Kleber Xavier Sampaio de Souza***

Chefe-Geral

Embrapa Informática Agropecuária



# Sumário

<b>Introdução .....</b>	<b>9</b>
<b>Determinismo e estocacidade.....</b>	<b>10</b>
<b>Método de predição não-linear e redes de mapas acoplados .....</b>	<b>12</b>
<b>Acoplamentos local e global .....</b>	<b>13</b>
<b>Sistemas dinâmicos discretos.....</b>	<b>14</b>
<b>Discussão.....</b>	<b>15</b>
<b>Referências .....</b>	<b>16</b>





# Dinâmica não-linear em sistemas hidrológicos

---

*Alexandre de Castro*

## Introdução

O planejamento dos recursos hídricos está intrinsecamente relacionado às ações e práticas que visam garantir determinados padrões de qualidade dentro de uma unidade de conservação, a bacia hidrográfica.

Nesse contexto, é essencial conhecer os fatores mais importantes da sistemática hidrológica e dos recursos hídricos propriamente ditos, principalmente, considerando-se uma descrição unificada do comportamento do sistema hidrológico, que surge da junção ou acoplamento de todos seus componentes. Embora nem todos os componentes do sistema hidrológico apresentem um comportamento complexo, o tamanho do domínio espaço-temporal e o alto grau de não linearidade envolvidos fazem com que o processo chuva-vazão (mecanismo que transforma as águas da chuva em vazão nas bacias hidrográficas) seja um sistema altamente complexo. Para modelar de forma realista um sistema de tal complexidade, a única possibilidade é eliminar certos vínculos entre as diversas variáveis envolvidas e considerar apenas os mecanismos prevalecentes, por uma redução no número dos graus efetivos de liberdade.

Comportamentos aparentemente complexos podem ser abordados do ponto de vista da Teoria do Caos e por um determinismo simples influenciado por algumas variáveis não-lineares, mutuamente dependentes e descritas

por uma Rede de Mapas Acoplados (RMA) (modelos acoplados equivalentes às equações diferenciais parciais, mas com evolução temporal discreta, i.e. não-contínua). A novidade na simulação hidrológica apresentada aqui está baseada na substituição das equações diferenciais usuais e modelos tradicionais, por um modelo equivalente, entretanto, com evolução temporal discreta, o que aumenta significativamente a eficiência computacional. As RMA permitem, a partir de uma discretização da região de interesse, interpretar as variáveis macroscópicas globais como sendo resultantes do comportamento coletivo de variáveis análogas, porém definidas localmente.

O comportamento caótico tem sido observado na modelagem de fenômenos que envolvem complexidade espaço-temporal. Os métodos e aplicações relacionados à dinâmica não-linear e à Teoria do Caos podem contribuir para uma compreensão de processos hidrológicos, particularmente, do processo chuva-vazão. Como exemplo, podemos citar os trabalhos de Berndtsson et al. (1994); Hense (1987); Jayawardena e Lai (1994); Koutsoyiannis e Pachakis (1996); Porporato e Ridolfi (1997); Puente e Obregon (1996) e Tsonis et al. (1993).

Esses autores investigaram comportamentos caóticos, limitados ao processo de chuva e de vazão, separadamente. Entretanto, o comportamento caótico do processo chuva-vazão para uma dada bacia hidrográfica, ainda carece de investigação detalhada.

Apesar de a literatura ser ampla, a maioria dos estudos envolvendo mapas acoplados tem se restringido a identificar comportamentos específicos nos mais variados sistemas, sendo pequeno o número de estudos que permitem entender todos os processos dinâmicos envolvidos, de modo a se poder explorar os modelos para fins de previsão.

## **Determinismo e estocacidade**

O sistema que governa o processo chuva-vazão pode ser visto como uma cascata de componentes acoplados, cada um, determinando de algum modo, o estado dos outros. Quando um sistema envolve um grande número de variáveis, uma dinâmica N-dimensional é esperada e o conjunto é praticamente indistinguível de um sistema puramente estocástico. Nesse

caso, a dimensão de sistema hidrológico, ou seja, seu número de graus de liberdade é tão alto que impede praticamente qualquer tipo de descrição determinística. Porém, a intensificação da importância relativa de alguns mecanismos pode permitir uma descrição determinística mais apurada e de baixa dimensionalidade. Trabalhos recentes envolvendo modelos dinâmicos mostram que sistemas descritos por dimensões infinitas, ou seja, equações diferenciais parciais, podem também, ser satisfatoriamente descritos por equações dinâmicas com atratores finitos de baixa dimensionalidade e por sincronismos que podem ocorrer entre subsistemas interagindo de forma não-linear (CARROLL; PECORA, 1993). Todas essas observações sugerem a possibilidade de uma descrição determinística, de baixa dimensionalidade, do processo chuva-vazão.

Muitos estudos têm sugerido a presença de componentes determinísticos de baixa dimensionalidade na dinâmica do clima global. Outros trabalhos sugerem que a dinâmica caótica de baixa dimensionalidade pode ser originada da interação não-linear entre clima e grandes bacias, por exemplo, oceanos e grandes massas de gelo.

Uma ferramenta útil de análise é a projeção do atrator (estado no qual um sistema dinâmico eventualmente se estabiliza) da série temporal, onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , reconstruído em um espaço  $m$ -dimensional de acordo com:

$$Y_i = (X_j, X_{j+\tau}, X_{j+2\tau}, \dots, X_{j+(m-1)\tau}) \quad (1)$$

onde;  $j = 1, 2, \dots, N - (n-1)\tau/\Delta t$   $m$  é a dimensão do vetor  $Y_j$  e  $\tau$  é uma defasagem no tempo  $\Delta t$ .

Para estimar a dimensão da correlação transforma-se o espaço de acordo com a Eq. (1). A função de correlação  $C(r)$  é determinada por

$$\frac{2}{N(N-1)} \sum H(r - |Y_i - Y_j|) \quad (2)$$

onde  $H$  é a função de Heaviside, com  $H(u) = 1$  para  $u > 0$ , e  $H(u) = 0$  para  $u \leq 0$ , onde  $u = r - |Y_i - Y_j|$ ,  $r$  é o raio da esfera centrada em  $Y_i$  ou  $Y_j$  e  $N$  é o número de pontos. Se a série temporal é caracterizada por um atrator, então para valores positivos de  $r$ , a função de correlação  $C(r)$  e o raio  $r$  estão relacionados de acordo com:

$$\sim ar^v \quad (3)$$

onde  $\alpha$  é constante e  $v$  é o expoente de correlação.

Estudos demonstram que dinâmicas de baixa dimensionalidade podem estar presentes na resposta de grandes bacias, onde são prováveis as conexões com o clima local. Interações entre solo-umidade e dinâmica atmosférica podem produzir comportamentos caóticos em diferentes escalas de tempo, pelos mecanismos de realimentação relacionados à reciclagem da umidade do solo por evaporação. Uma vez que esses mecanismos produzem entradas no sistema, ou seja, chuva, o passo final do processo é a síntese complexa executada pela bacia durante a transformação chuva-vazão.

## Método de predição não-linear e redes de mapas acoplados

A predição não-linear no estudo de sistemas dinâmicos é considerada um método prático com possibilidades de desenvolver, a curto prazo, previsões e métricas em sistemas complexos, pela sua capacidade de melhor definir os aspectos não-lineares envolvidos nesse tipo de sistema. Dentro da dinâmica determinística, predições de caráter não-linear são mais confiáveis que os métodos estatísticos em geral. A técnica de predição não-linear é uma importante ferramenta investigativa de dinâmica de fenômenos naturais, em particular, para determinar a presença de caos determinístico, pois a possibilidade de realizar previsões em séries temporais está diretamente relacionada com os tipos de dinâmicas que as geraram.

O método de predição não-linear utiliza o conceito de espaço de fase para determinar o atrator da série temporal. Para uma série temporal  $X_i$  onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , o espaço de fase pode ser obtido de acordo com Eq. (1).

Uma vez que o atrator foi obtido no espaço de fase  $m$ -dimensional, é possível interpretar a dinâmica na forma de mapas do tipo  $f_T$   $m$ -dimensionais, conhecidos por RMA, ou seja,

$$Y_{j+T} = f_T(Y_j) \quad (4)$$

onde  $Y_j$  e  $Y_{j+T}$  são vetores de dimensão  $m$  e descrevem o estado  $j$  atual e estado  $j+T$  futuro do sistema. O problema geral do método é, então, encontrar uma expressão apropriada para as funções  $f_T$ .

Existem várias possibilidades de aproximações para as construções das funções  $f_T$ . Essas possibilidades estão divididas principalmente em duas categorias: funções com acoplamento global e funções com acoplamento local. As RMA são amplamente utilizadas para estudar processos espaço-temporais em diversos sistemas complexos.

Para construir uma RMA, é necessário desenhar uma rede espacial adequada à investigação que se deseja efetuar e atribuir uma variável dinâmica  $x_t(i)$  a cada célula, onde o índice  $i$  denota a posição na rede, e  $t$  representa o tempo de interação. Para a dinâmica local é possível selecionar uma ampla variedade de sistemas discretizados no tempo. Entre vários mapas destaca-se principalmente o mapa logístico, empregado por diversos autores.

Os mapas podem ser acoplados de muitas maneiras segundo a natureza do problema em questão. O acoplamento pode ser local, no qual a dinâmica de uma célula é modificada pelas variáveis das células vizinhas; ou não local, onde uma célula é afetada por um conjunto de células distantes da célula em questão. Outro importante aspecto a ser considerado é o alcance do acoplamento. O caso extremo de acoplamento de curto alcance é efetuado com o vizinho mais próximo (acoplamento local unidimensional). Nesse caso, a dinâmica de uma célula  $i$  é afetada somente pelas células vizinhas  $(j-1)$  e  $(i+1)$  colocadas em uma linha.

## Acoplamentos local e global

A expressão geral para uma RMA é dada por:

$$x_{t+1}(\vec{r}_i) = f(x_t(\vec{r}_i)) + \Phi \quad (5)$$

onde  $\Phi$  é uma função de acoplamento que depende do estado de algumas células do sistema que podem ou não ser vizinhas à célula de coordenada  $(r_i)$ . O acoplamento local é dado por:

$$\Phi(\vec{r}_j, t) = \gamma_0 \cdot g(x_t(\vec{r}_i)) + \gamma_1 \cdot g(x_t(\vec{r}_{i+j})) + \gamma_2 \cdot g(x_t(\vec{r}_{i-j})) \quad (6)$$

onde  $\gamma_0, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes de acoplamento e  $g(x_t(\vec{r}_i))$  representa o estado de cada célula  $i$ .

Já o acoplamento global é dado pela seguinte expressão:

$$x_{t+1}(i) = (1 - \theta) f(x_t(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t(j)) \quad (7)$$

onde  $\varepsilon$  é o parâmetro de acoplamento entre as células,  $f(x_t(i))$  é a dinâmica local da célula  $i$  e  $f(x_t(j))$  representa as dinâmicas das células restantes.

Entre as vantagens de trabalhar com RMA está o fato de que o caos local e o processo de interação espacial podem ser cuidadosamente separados. Por sua natureza espaço-temporal discreta, as RMA são muito eficientes do ponto de vista computacional. O número de células necessárias é bem menor em comparação ao utilizado, por exemplo, pela técnica de autômatos celulares (modelos que consistem em uma rede infinita e regular de células, cada uma podendo possuir um número finito de estados, que variam de acordo com regras determinísticas).

## Sistemas dinâmicos discretos

O modelo de RMA pode ser utilizado para descrever sistemas hidrológicos, nos quais são empregadas equações diferenciais como, por exemplo, as equações de reação-difusão para uma variável  $x$  em uma dimensão  $z$ :

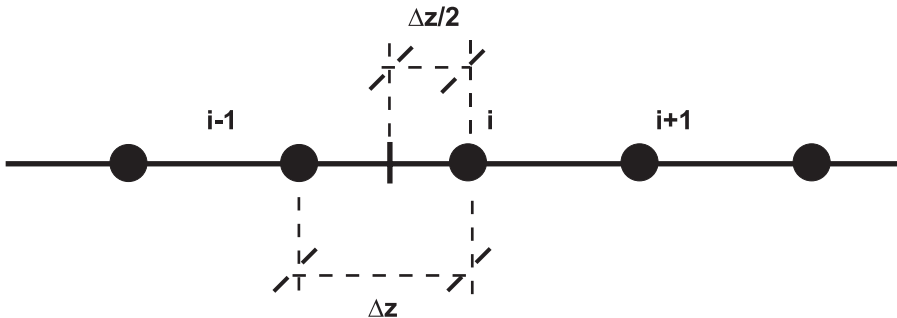
$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = f(x(z,t)) + D \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} \quad (8)$$

onde  $f(x(z,t))$  representa a função ou dinâmica local, e  $D$  é constante de difusão. A discretização da derivada temporal é dada por:

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t} \quad (9)$$

Com relação à variável espacial (ver Figura 1), a derivada discretizada é expressa por:

$$\frac{\partial x(i)}{\partial z} \rightarrow \frac{x(i + \Delta z/2) - x(i - \Delta z/2)}{\Delta z} \quad (10)$$



**Figura 1.** Discretização da segunda derivada.

Consequentemente, a equação (7) equivale a:

$$x_{t+1}(i) = f(x_t(i) + x_t(i) + \gamma [x_t(i+1) + x_t(i-1) - 2x_t(i)]) \quad (11)$$

que representa a RMA com acoplamento discreto em uma dimensão (z).

## Discussão

Recentemente, pesquisas em sistemas complexos têm conduzido a novas abordagens e aplicações da modelagem dinâmica não-linear. As recentes alterações no enfoque de estudo de problemas hidrológicos como administração de recursos hídricos, transporte de poluições, infiltração de água no solo, etc., necessitam, principalmente, de uma modelagem precisa do processo chuva-vazão. Embora as últimas décadas tenham testemunhado uma grande variedade de aproximações e o desenvolvimento de um grande número de modelos para entender a dinâmica do processo chuva-vazão, uma aproximação unificada para o problema ainda está sendo investigada. Isso é devido à grande variabilidade espaço-temporal exibida



pelo processo chuva-vazão e a limitação na disponibilidade de ferramentas matemáticas apropriadas para explorar a dinâmica que está inclusa no processo.

A aplicação do método de predição não-linear, utilizando uma RMA, para investigar possíveis comportamentos caóticos na dinâmica do processo chuva-vazão pode ser útil considerando-se que as equações determinísticas não-lineares são extremamente sensíveis às condições iniciais.

Em vários contextos, as RMA são relativamente mais simples de serem empregadas do que equações contínuas. As evoluções temporais de muitos sistemas hidrológicos, como o processo chuva-vazão, podem ser descritas pelos mapas acoplados com termos não-lineares e topologia não trivial em que, por suas interações, diferentes atratores podem emergir e representar o comportamento dos diversos componentes do processo.

## Referências

BERNDTSSON, R.; JINNO, K.; KAWAMURA, A.; OLSSON, J.; XU, S. Dynamical systems theory applied to long-term temperature and precipitation time series, **Trends in Hydrology**, v. 1, p. 291-297, 1994.

CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Cascading synchronized chaotic systems, **Physica D**, v. 67, n. 1-3, 126-140, Aug. 1993. Doi >10.1016/0167-2789(93)90201-B.

HENSE, A. On the possible existence of a strange attractor for the southern oscillation, **Beiträge zur Physik der Atmosphäre**, v. 60, n. 1, p. 34-47, 1987.

JAYAWARDENA, A.W.; LAI, F. Analysis and prediction of chaos in rainfall and stream flow time series. **Journal Hydroology**, v. 153, n. 1-4, p. 23-52, 1994.

KOUTSOYIANNIS, D.; PACHAKIS, D. Deterministic chaos versus stochasticity in analysis and modeling of point rainfall series. **Journal of Geophysical Research**, v. 101, n. D21, p. 26,441-26,451, 1996. doi:10.1029/96JD01389.

PORPORATO, A.; RIDOLFI, L. Nonlinear analysis of river flow time sequences, **Water Resources Research**, v. 33, n. 6, p. 1353-1367, 1997.

PUENTE, C. E.; OBREGON, N. A deterministic geometric representation of temporal rainfall: Results for a storm in Boston, *Water Resources Research*, v. 32, n. 9, p. 2825-2839, Sept. 1996.

TSONIS, A. A; ELSNER, J. B. Multiple attractors, fractal basins and long term climatic dynamics, **Beiträge zur Physik der Atmosphäre**, v. 63, n. 6, p. 171-176, 1993.



---

*Informática Agropecuária*

Ministério da  
Agricultura, Pecuária  
e Abastecimento



CGPE 9147