



UMA NOVA PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO USANDO ALGORITMOS GENÉTICOS E RELAXAÇÃO LAGRANGEANA/SURROGATE

Édson Luiz França Senne¹, João Carlos Furtado², Luiz Antônio Nogueira Lorena³, Marcelo Gonçalves Narciso⁴

Termos para indexação: Algoritmo genético construtivo (AGC); Problema de localização; Problema das p-medianas (PP); Relaxação lagrangeana/surrogate.

Index terms: Constructive genetic algorithm (CGA); Location problem; P-median problem; Lagrangean/surrogate relaxation.

1. Introdução

Os problemas de localização (Beasley, 1993) estão sempre presentes em vários setores da indústria, comércio, agricultura, etc. Como exemplos, podem ser citados: localização de silos, com a restrição de atender aos produtores de uma determinada região com as rotas existentes para escoar a produção, localização de hospitais e escolas de forma que uma grande parcela da população local tenha fácil acesso para se chegar a tais lugares, etc. Na Embrapa Informática Agropecuária, há um projeto, cujo nome é Análise de Redes com Sistemas de Informação Geográfica (ARSIG), que visa fornecer ao usuário um sistema de apoio a decisão, mostrando um mapa digitalizado de uma dada região, os melhores pontos para se localizar escolas, pontos de ônibus, silos, etc., e também as melhores rotas (ARSIG, 2000). Um dos subprodutos deste projeto são novos algoritmos para se determinar soluções viáveis de boa qualidade para o problema de localização.

Para se resolver o problema de localização, usa-se o enfoque das p-medianas (Furtado, 1998). O problema das p-medianas é o problema de se localizar p facilidades (hospital, escola, silos, etc.) em uma rede (malha viária, podendo ser ruas ou rodovias) de modo a minimizar a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda (população, produtor rural, etc.) para o ponto de recurso mais próximo (uma das p-medianas, podendo ser hospital, silos, etc.).

Para se obter uma solução viável, podendo ser ótima ou quase ótima, pode-se usar o algoritmo genético construtivo (AGC) (Furtado, 1998; Lorena & Furtado, 1998) para resolver o problema das p-medianas. Uma inovação feita em relação ao AGC foi a melhoria do processo de mutação, o que melhorou ainda mais os resultados. Esta inovação na mutação será descrita neste trabalho e os resultados obtidos serão mostrados e analisados. A solução viável é também um limitante superior para a solução ótima do problema.

Um limitante inferior de boa qualidade é obtido através do enfoque da relaxação lagrangeana/surrogate (Narciso & Lorena, 1999). Este trabalho é pioneiro em aplicar esta relaxação (conhecida também por lagsur) em problemas de localização. Os resultados desta relaxação serão mostrados neste trabalho, bem como uma comparação com a relaxação lagrangeana tradicional (Fisher, 1981; Narciso & Lorena, 1999; Lopes, 1992). A solução fornecida pela relaxação não é viável, geralmente. Porém, o resultado da relaxação ajuda a determinar o quão perto uma solução viável está do ótimo.

A vantagem de se ter limites inferiores e superiores é saber quão boa é a solução obtida. Por exemplo, se a diferença entre elas for de menos de 1 %, isto indica que a solução obtida é de ótima qualidade. Além disso, se o problema for inteiro e a diferença entre a solução viável (inteira) e a solução da relaxação (real) for menor do que 1, então a solução viável é ótima, com certeza. Em suma, pode-se saber a qualidade da solução obtida. Além disto, os limites inferior e superior podem ser usados em métodos exatos como entrada para se calcular a solução ótima. Quanto mais perto entre si estão os limites, mais rapidamente se calcula a solução ótima.

¹ Doutor em Computação Aplicada, FEG/UNESP, Caixa Postal 3025, 12500-000, Guaratinguetá-SP. E-mail: elfsenne@feg.unesp.br

² Doutor em Computação Aplicada, Universidade Federal de Santa Maria, Caixa Postal 1005, Santa Maria, RS. E-mail: jcarlos@iac.ufsm.br

³ Doutor em Computação Aplicada, LAC/INPE, Av. dos Astronautas, 1758, Caixa Postal 515, 12227-010, São José dos Campos-SP. E-mail: lorena@lac.inpe.br

⁴ Doutor em Computação Aplicada, Pesquisador da Embrapa Informática Agropecuária, Caixa Postal 930, Campinas-SP.
E-mail: narciso@cnpia.embrapa.br

através de um método exato (Fisher, 1981).

2. Uma descrição matemática sobre os problemas das P-medianas

A busca de p-medianas num grafo é um problema clássico de localização. O objetivo é localizar p facilidades ou recursos (medianas), de forma a minimizar a soma das distâncias de cada vértice à sua facilidade (ou algum recurso) mais próxima. No grafo, os arcos seriam as rodovias ou malha viária e os nós, locais onde as facilidades (escolas, silos, etc.) podem ser localizadas.

O problema das p-medianas pode ser formulado como um problema de programação inteira binária. Consideremos um grafo completo para uma dada instância, obtido através da aplicação do algoritmo de Floyd (Beasley, 1993) e o conjunto de vértices indexados resultantes $V = \{1, \dots, n\}$. Para cada $i, j \in V$, μ_{ij} (maior que zero e inteiro) é o custo (ou distância) de se atribuir o vértice j ao vértice i . Se o vértice j é atribuído ao vértice i , então $x_{ij} = 1$, caso contrário, $x_{ij} = 0$.

O problema das P-medianas (PP), para n vértices, é formulado matematicamente como:

$$\begin{aligned} (PP) \quad v(PP) &= \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \mu_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a} \quad &\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V = \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ii} = p \quad (2.2)$$

$$x_{ij} \leq x_{ji}, \quad j \in V \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, j \in V \quad (2.4)$$

As restrições (2.1) e (2.3) asseguram que cada vértice j seja atribuído somente a um vértice i , que necessariamente deve ser uma mediana. A restrição (2.2) determina o número exato de medianas que devem ser localizadas e a restrição (2.4) nos indica a condição binária de atribuições (ou não) de vértices a medianas.

3. Algoritmo Genético Construtivo

Nos trabalhos de Furtado (1998) e Lorena & Furtado (1998) têm-se uma descrição detalhada do AGC. Neste item, vamos mostrar uma breve descrição do AGC, os algoritmos do AGC e do AGC com mutação modificada (AGCM) para resolver o problema das P-medianas.

A população inicial do AGC é formada apenas por estruturas ou esquemas. Um esquema pode ser representado pela cadeia $s_k = (s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn})$, onde n é o número de itens a serem avaliados (número de facilidades no problema das p-medianas). No início do algoritmo do AGC, são gerados esquemas que compõem a população inicial. Em seguida, estes esquemas sofrem uma seleção e em seguida, recombinação (Lorena & Furtado, 1998). A cada esquema é associado um valor que é a solução viável do problema. Existem duas funções f e g de avaliação para cada esquema. Cada uma gera um valor: um limite superior (função g) e um inferior (função f). Se o problema for de minimização, o limite superior (função g) é uma solução viável e o inferior (função f), um valor que está abaixo do ótimo. Mais detalhes sobre as funções f e g estão descritos em Furtado (1998). Alguns esquemas são escolhidos para sofrerem mutação. Este esquema novo gerado pela mutação também é avaliado. Após um certo período, a população sofre um decréscimo, para que não haja superpopulação e para que haja esquemas de boa qualidade. Os esquemas mais próximos do ótimo são os escolhidos para permanecerem na nova população. Os demais esquemas são descartados. O algoritmo pára quando se obtém o ótimo ou quando se atinge um certo número de operações. Mais informações podem ser vistas em Furtado (1998).

3.1 O algoritmo

Os passos da forma básica do algoritmo genético construtivo podem ser resumidos, como a seguir.

AGC() {Algoritmo Genético Construtivo} $\alpha = 0;$ $\varepsilon = 0.05;$ {intervalo de tempo}**Inicializar** $P\alpha;$ {população inicial}**Avaliar** $P\alpha;$ {usar as funções de avaliação em cada estrutura}**Para todo** $s_k \in P\alpha$ **calcule** $\delta(s_k)$ {cálculo do rank}**Fim_Para****Enquanto não** (condição de parada) **fazer****Para todo** $s_k \in P\alpha$ **satisfazendo** $\alpha < \delta(s_k)$ **fazer** {teste de evolução} $\alpha := \alpha + \varepsilon;$ **Selecionar** $P\alpha_{+c}$ de $P\alpha;$ {operador reprodução}**Recombinar** $P\alpha;$ **Avaliar** $P\alpha;$ {calcula adaptação proporcional, usando f e g}**Fim_Para****Para todo novo** $s_k \in P\alpha$ **calcule** $\delta(s_k)$ {cálculo do rank}**Fim_Para****Fim_enquanto**

O algoritmo pára o processo evolutivo e a busca quando algum dos seguintes critérios é satisfeito:

1. a solução ótima do problema é obtida (quando esta é conhecida);
2. a população torna-se vazia, pois todas as estruturas são rejeitadas (obtido através de um parâmetro suficientemente Grande);
3. um número pré-estabelecido de iterações é atingido.

O algoritmo genético construtivo aplicado ao problema das p-medianas com a nova proposta de mutação é descrito a seguir.

AGCM() {Algoritmo Genético Construtivo com modificação na mutação} $\alpha = 0;$ $\varepsilon = 0.05;$ {intervalo de tempo}**Inicializar** $P\alpha;$ {população inicial}**Avaliar** $P\alpha;$ {usar as funções f e g}**Para todo** $s_k \in P$ **calcule** $\delta(s_k)$ {cálculo do rank}**Fim_Para****Enquanto não** (condição de parada) **fazer****Para todo** $s_k \in P\alpha$ **satisfazendo** $\alpha < \delta(s_k)$ **fazer** {teste de evolução} $\alpha := \alpha + \varepsilon;$ **Selecionar** $P\alpha_{+c}$ de $P\alpha;$ {operador reprodução}**Selecionar** um dado $s_k \in P\alpha$ e **implementar** mutação**Recombinar** $P\alpha;$ **Avaliar** $P\alpha;$ {calcula adaptação proporcional, usando f e g}**Fim_Para****Para todo novo** $s_k \in P\alpha$ **calcule** $\delta(s_k)$ {cálculo do rank}**Fim_Para****Fim_enquanto**

No algoritmo acima (AGCM), tem-se a inserção do seguinte comando:

Selecionar um dado $s_k \in P\alpha$ e **implementar** mutação

Este comando na verdade é o seguinte algoritmo:

$sol2 = 10000000$ (atribuir valor muito grande para $sol2$)

Escolher uma estrutura s_k e ver quais são os clusters formados

Enquanto não fim repita

Enquanto existir cluster para examinar

Mudar mediana de lugar no cluster (todos os casos)

Se melhorar a solução associado ao novo cluster

então sol1 = solução modificada

Fim Se

Fim enquanto

Se sol1 < sol2 (medianas mudaram e resultado melhorou) então

Abre os clusters e calcular nova solução (sol2) com o novo s_k

Se sol2 > sol1

então parar

senão ver quais são os clusters formados na nova estrutura s_k

Fim Se

Fim Se

Fim_Enquanto

4. A relaxação lagrangeana/surrogate

A relaxação lagrangeana/surrogate (ou lagsur) (Senne & Lorena, 1997; Narciso & Lorena, 1999) é baseada na relaxação lagrangeana tradicional (Fisher, 1981), relaxação surrogate (Dyer, 1980) e otimização por subgradiantes (Lopes, 1992). A relaxação lagsur é uma relaxação proposta recentemente para corrigir o comportamento aleatório (ou errático) da otimização por subgradiantes, nas primeiras iterações deste, quando da resolução do dual lagrangeano (Lopes, 1992; Narciso & Lorena, 1999).

Matematicamente, a relaxação lagrangeana é obtida através de um multiplicador, chamado de lagrangeano, aplicado a uma das restrições do problema. Para o nosso caso de estudo, seja a relaxação da restrição 2.1, mostrada anteriormente. A relaxação lagrangeana do problema das P-medianas, para um multiplicador λ , $n \times 1$, ficaria assim:

$$v(LPP) = \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (\mu_{ij} - \lambda_i) \cdot x_{ij} + \sum \lambda_i$$

(LPP)

e sujeito às restrições (2.2) (2.3) (2.4)

A relaxação lagrangeana/surrogate é feita por se aplicar um multiplicador surrogate, e em seguida, um multiplicador lagrangeano. Desta forma, tem-se os seguintes passos para se obter o lagsur:

1. relaxação surrogate aplicada à restrição 2.1 (a qual será a 2.5)

$$v(SPP) = \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \mu_{ij} x_{ij}$$

(SPP)

$$\text{sujeito a } \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \lambda_{ij} x_{ij} = \sum \lambda_{ij}, \forall j, i \in V = \{1, \dots, n\} \quad (2.5)$$

e sujeito também às restrições (2.2) (2.3) (2.4)

2. restrição 2.5 adicionada à função objetivo (relaxação lagrangeana)

A restrição 2.5 agora é unidimensional. Em seguida, para um multiplicador u , real, unidimensional, aplica-se a esta restrição (2.5) o multiplicador u e adiciona-se a restrição à função objetivo, resultando na relaxação lagrangeana/surrogate, a qual é descrita por:

$$v(LSPP) = \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (\mu_{ij} - u \cdot \lambda_{ij}) \cdot x_{ij} + u \sum \lambda_{ij}$$

(LSPP)

sujeito às restrições (2.2) (2.3) (2.4)

Para se resolver este problema, usa-se a heurística geral de subgradiente, um método iterativo descrito em Lopes (1992). Em cada iteração deste método, o vetor λ é atualizado. Desta forma, para cada λ é calculado um novo valor de u para corrigir o vetor λ no sentido de aproximar a função objetivo ao ótimo e, desta forma, estabilizar a sequência de valores obtidos. A sequência de pontos $v(LSPP)$ converge após um certo número de iterações. Quando a convergência ocorre, tem-se o melhor valor obtido para $v(LSPP)$, o qual será o valor obtido para limite inferior (Senne & Lorena, 1997; Narciso & Lorena, 1999). A Fig.1 descreve o comportamento das relaxações lagsur e lagrangeana durante as iterações da Heurística Geral de Subgradientes para uma dada instância de um Problema das p-medianas (700 nós por 5 medianas).

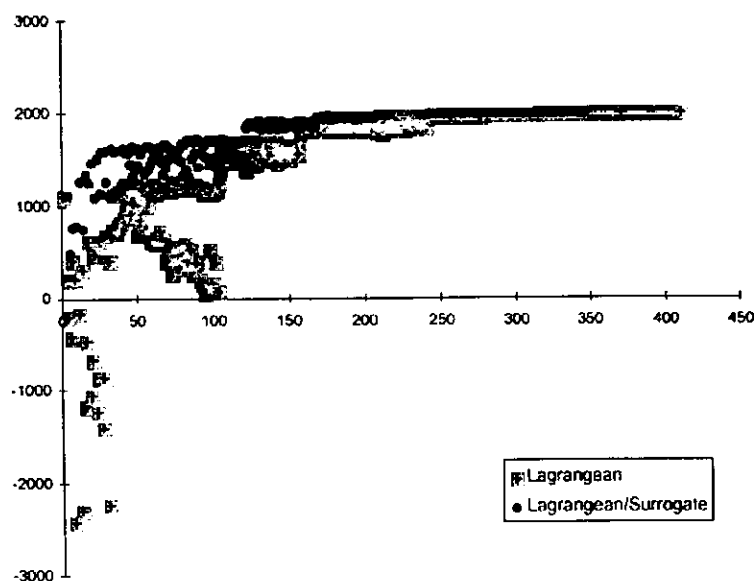


FIG.1. Comportamento das Relaxações lagrangeana e Lagrangeana/Surrogate.

5. Resultados obtidos

O AGC e a relaxação lagrangeana/surrogate foram testados para o problema das p-medianas usando-se instâncias geradas pelo projeto ARSIG, através de dados colhidos para a cidade de São José dos Campos. O tamanho das instâncias são 324, 818 e 3282 vértices, sendo que o número de medianas varia de 5 a 108 para o AGC, e 33 a 200 para a relaxação lagrangeana/surrogate.

O algoritmo foi codificado na linguagem de programação C e executado numa estação SUN ULTRA 30, com processador de 200 MHz.

5.1 O AGC aplicado ao Problema das P-medianas

Os resultados resumidos podem ser vistos nas Tabelas 1 e 2. O campo da tabela de nome diferença tem o seguinte significado:

$$\text{Diferença} = (|\text{solução AGC} - \text{limite inferior}| * 100\%) / |\text{solução AGC}|$$

Os valores para limite inferior foram alcançados com a relaxação lagrangeana/surrogate, algoritmo também desenvolvido no projeto ARSIG.

Podemos observar nas Tabelas 1 e 2 que o tempo computacional aumenta para um número maior de medianas. Isto pode ser facilmente explicado pela busca local (mutação) que é mais demorada nestes casos.

A média da *diferença* para o AGC em relação à solução ótima foi de 0,38%, e o pequeno intervalo de tempo computacional necessário mostra que o AGC foi eficiente na otimização dos problemas testados. O mesmo pode ser dito sobre o AGCM, com uma diferença média de 0,28% e tempo um pouco maiores em algumas instâncias, por causa da mutação mais elaborada.

TABELA 1. Resultados obtidos com o AGC com instâncias do Proj. ARSIG para o problema das p-medianas sem usar a nova mutação.

Problema	Vértices	Medianas	Solução ótima	AGC	Diferença (%)	Tempo (s)
pmed1	100	5	5819	5819	0	15
pmed2	100	10	4093	4104	0,268	29
pmed3	100	10	4250	4250	0	30
pmed4	100	20	3034	3053	0,626	52
pmed5	100	33	1355	1362	0,515	89
pmed6	200	5	7824	7858	0,435	106
pmed7	200	10	5631	5639	0,124	188
pmed8	200	20	4445	4477	0,495	325
pmed9	200	40	2734	2784	1,82	701
pmed10	200	67	1255	1269	1,11	1242
pmed11	300	5	7696	7696	0	311
pmed12	300	10	6634	6634	0	554
pmed16	400	5	8162	8162	0	322
pmed21	500	5	9138	9138	0	1425

TABELA 2. Resultados obtidos com o AGC com instâncias do Proj. ARSIG usando a nova mutação para o problema das p-medianas.

Problema	Vértices	Medianas	Solução ótima	AGC	Diferença (%)	Tempo (s)
pmed1	100	5	5819	5819	0	14
pmed2	100	10	4093	4093	0	27
pmed3	100	10	4250	4250	0	28
pmed4	100	20	3034	3050	0,527	52
pmed5	100	33	1355	1355	0	77
pmed6	200	5	7824	7824	0	26
pmed7	200	10	5631	5631	0	160
pmed8	200	20	4445	4459	0,315	344
pmed9	200	40	2734	2747	0,475	883
pmed10	200	67	1255	1289	2,7	1242
pmed11	300	5	7696	7696	0	10
pmed12	300	10	6634	6637	0	530
pmed16	400	5	8162	8162	0	334
pmed21	500	5	9138	9138	0	831

5.2 A relaxação lagrangeana/surrogate (lagsur) aplicado ao Problema das P-medianas

Tal como no item anterior, a comparação será feita com duas tabelas, uma para cada relaxação (lagrangeana/surrogate e lagrangeana).

TABELA 3. Resultados obtidos com o lagsur com instâncias de Beasley.

Problema	Vértices	Medianas	Solução ótima	lagsur	Diferença (%)	Tempo (s)
pmed5	100	33	1355	1355,25	0,00018	0.58
pmed10	200	67	1255	1255,32	0,00025	4.0
pmed15	300	100	1729	1229,11	0,0089	16.78
pmed20	400	133	1789	1789,76	0,00042	51.80
pmed25	500	167	1828	1828,34	0,00019	127.60
pmed30	600	200	1989	1989,76	0,00038	257.02

TABELA 4. Resultados obtidos com a relaxação lagrangeana com instâncias de Beasley.

Problema	Vértices	Medianas	Solução ótima	lagsur	Diferença (%)	Tempo (s)
pmed5	100	33	1355	1355,26	0,00019	0.66
pmed10	200	67	1255	1255,21	0,00016	4.0
pmed15	300	100	1729	1229,35	0,00028	20.37
pmed20	400	133	1789	1789,34	0,00019	60.35
pmed25	500	167	1828	1828,21	0,00011	171.20
pmed30	600	200	1989	1989,37	0,00019	302.16

Observando-se a última coluna (tempo), nota-se que a relaxação lagsur obtém resultados em menor tempo, com a mesma qualidade (valores praticamente idênticos, com diferença na quarta casa decimal, conforme observado na coluna Diferença (%)).

6. Conclusões e comentários

Os resultados obtidos com o AGC para o problema das P-medianas mostraram que o novo método (AGCM) é eficiente na obtenção de boas soluções. Na maioria das instâncias analisadas as soluções ótimas ou soluções com valores estando a menos de 2% das soluções ótimas foram obtidas.

A nova proposta de mutação fez com que o algoritmo do AGC ficasse um pouco mais lento. Entretanto, obtém-se a solução ótima mais cedo. Desta forma, a demora do algoritmo é compensada pela obtenção da solução desejada em um número menor de iterações.

Com relação à relaxação lagrangeana/surrogate, as soluções geradas foram boas, bem como os tempos obtidos, os quais foram menores do que os tempos de execução obtidos pela relaxação lagrangeana tradicional. Outro detalhe importante é quando o número de variáveis aumenta. Neste caso, o desempenho da relaxação lagrangeana/surrogate em termos de tempo é bem melhor. Esta característica já era prevista, visto haver trabalhos anteriores que já mostravam o bom desempenho da

7. Referências bibliográficas

ARSIG - Análise de Redes com Sistemas de Informações Geográficas. Disponível em:
<<http://www.lac.inpe.br/~lorena/ArsigIndex.html>>. Acesso em 14 ago. 2000.

BEASLEY, J. E. OR-Library: distributing test problems by electronic mail. **Journal of Operational Research Society**, v. 41, n. 11, p. 1069-1072, 1990.

BEASLEY, J. E. Lagrangean heuristics for location problems. **European Journal of Operational Research**, v. 65, p. 383-399, 1993.

DYER, M. E. Calculating surrogate constraints. **Mathematical Programming**, v. 19, p. 255-258, 1980.

FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method of solving integer programming problems. **Management Science**, v. 27, p. 1-18, 1981.

FURTADO, J. C. **Algoritmo genético construtivo na otimização de problemas combinatoriais de agrupamentos**. 1998. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.

LORENA, L. A. N.; FURTADO, J. C. Constructive genetic algorithm for clustering problems. In: OPTIMIZATION 98, Coimbra. [Anais....]. [Coimbra]: Sagres, 1998.

LOPES, F. B. **Nova heurística para o problema de cobertura de conjuntos**. 1992. Tese (Mestrado em Computação Aplicada) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.

NARCISO, M. G., LORENA, L. A. N. Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problem. **European Journal of Operational Research**, v. 114, n. 1, p.165-177, Apr. 1999.

SENNE, E. L. F.; LORENA, L. A. N. Lagrangean/surrogate heuristics for location problems. In: EURO INFORMS, 1997, Barcelona. **Proceedings**. [Barcelona: s.n., 1997].

IMPRESSO



*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
Centro Nacional de Pesquisa Tecnológica em Informática para a Agricultura
Ministério da Agricultura e do Abastecimento
Rua Dr. André Tosello, s/nº Caixa Postal 6041 - Barão Geraldo
13083-970 - Campinas, SP
Fone (19) 3289-9800 Fax (19) 3289-9594
E-mail: sac@cnptia.embrapa.br
<http://www.cnptia.embrapa.br>*

**MINISTÉRIO DA AGRICULTURA
E DO ABASTECIMENTO**

