



## UMA PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE ROTEAMENTO USANDO A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA/SURROGATE

Luiz Antônio Nogueira Lorena<sup>1</sup>, Marcelo Gonçalves Narciso<sup>2</sup>

Termos para indexação: Problemas de roteamento; Problema do caixeiro viajante; PCV; Otimização combinatória; Solução ótima; Tempo de execução.

### 1. Introdução

Os problemas de roteamento (Fisher, 1981) estão sempre presentes em vários setores da indústria, comércio, agricultura e no nosso cotidiano. Sempre se quer chegar de um ponto a outro da maneira mais rápida possível. Há aqueles que querem simplesmente chegar mais rápido. Há outros que se importam, além do tempo, com a menor distância para economizar combustível também. Seja qual for o motivo para se chegar mais rápido de um ponto a outro, o fato é que para se determinar a menor distância entre dois ou mais pontos é necessário saber quais são as rotas possíveis. Quando o número de maneiras possíveis para se chegar de um ponto a outro é grande, determinar a melhor rota pode ser um verdadeiro desafio.

No domínio urbano, problemas de roteamento mais comuns aparecem nos trajetos dos transportes coletivos, na distribuição de produtos de uma empresa para uma série de consumidores, etc. No domínio rural, a distribuição de produtos também ocorre. Para um determinado comboio de caminhões sair de um silo, passar pelos produtores de uma região para recolher a produção e então retornar ao silo de origem, levando-se em conta o tempo, a proposição de uma melhor rota pode ser um problema muito difícil de se resolver. O inverso também ocorre, isto é, escoar a produção de um silo para diversos centros consumidores e então retornar ao silo, de forma rápida e econômica também pode ser um desafio. Na Embrapa Informática Agropecuária há um projeto, cujo nome é Análise de Redes com Sistemas de Informação Geográfica (ARSIG, 2001), que visa fornecer ao usuário um sistema de apoio à decisão que mostrará, em um mapa digitalizado de uma dada região, os melhores pontos para se localizar escolas, pontos de ônibus, silos, etc. e também as melhores rotas (ARSIG, 2001). Subprodutos deste projeto são novos algoritmos para se determinar soluções viáveis de boa qualidade para o problema de roteamento, bem como limitantes para a melhor solução possível (ótima) do problema.

Existem muitos tipos de situações nas quais se encaixam o problema de roteamento. Entretanto, conforme a situação há um enfoque diferente. Por exemplo, para se distribuir um produto de um determinado local para uma série de centros consumidores e então retornar ao local de origem, o melhor enfoque é o problema do caixeiro viajante (Christofides, 1979). Para um conjunto de caminhões com diferentes capacidades de armazenamento, o ideal é que cada caminhão seja direcionado para uma região diferente. Desta forma é necessário uma atribuição dos caminhões para determinadas regiões e em cada região, um *tour* (passagem) pelos produtores. Tem-se neste caso dois problemas: o de atribuição generalizada (Jaikumar & Fisher, 1981; Narciso & Lorena, 1996) para atribuir regiões a um caminhão (ou comboio) e o do caixeiro viajante para que o caminhão (ou comboio) percorra um *tour* na região escolhida para atendimento.

<sup>1</sup> Doutor em Pesquisa Operacional, LAC/INPE- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Av. dos Astronautas, 1758 Jardim da Granja. Caixa Postal 515 - 12201-970 - São José dos Campos, SP. (lorena@lac.inpe.br)

<sup>2</sup> Doutor em Computação Aplicada, Pesquisador da Embrapa Informática Agropecuária, Caixa Postal 6041, Baré (narciso@cnptia.embrapa.br)

Neste trabalho tem-se como enfoque o problema do caixeiro viajante (PCV), no que se refere a obter um limite inferior de boa qualidade para a solução ótima (a melhor solução possível) em um tempo menor do que os métodos propostos na literatura. O objetivo de se obter um limite inferior é para se saber quão próxima da solução ótima está a solução viável obtida. Sabendo-se a diferença entre o limite inferior (geralmente uma solução não viável) e o limite superior obtido (uma solução viável), pode-se saber a qualidade da solução obtida, inclusive se ela é a melhor (solução ótima). Além disto, os limites inferior e superior podem ser usados em métodos exatos como entrada para se calcular a solução ótima. Quanto mais perto entre si estão os limites, mais rapidamente se calcula a solução ótima através de um método exato (Fisher, 1981).

O limitante inferior de boa qualidade que este trabalho propõe a mostrar é obtido através do enfoque da relaxação lagrangeana/surrogate (Narciso & Lorena, 1996), conhecida também por lagsur. Os resultados desta relaxação são mostrados neste trabalho, bem como uma comparação com a relaxação lagrangeana tradicional (Fisher, 1981; Narciso & Lorena, 1999; Lopes, 1992).

## 2. Uma descrição do Problema do Caixeiro Viajante

Suponha que um comboio de caminhões ou um caminhão (os quais fazem o papel de um caixeiro viajante), a partir de sua localidade de origem (cidade ou silo ou indústria, etc.), precise visitar um conjunto de  $n-1$  locais (cidades, produtores, consumidores de produtos, CEASA, etc.). Cada local deverá ser visitado somente uma vez. Após visitar todas as  $n-1$  locais, então os caminhões (ou caixeiro) deverão voltar à sua localidade inicial. O caixeiro poderá escolher a primeira localidade a ser visitada, a segunda, e assim por diante. Entretanto, caso o caixeiro queira economizar tempo e energia (ou ainda gasolina, recursos, etc.), então ele deverá procurar o menor caminho tal que todas as localidades sejam visitadas somente uma vez e então retornar para a sua localidade de origem. Se o caixeiro sabe a distância entre as localidades, então ele pode encontrar o caminho mais curto para a sua viagem simplesmente por comparar todas as maneiras possíveis de se visitar as  $n-1$  localidades e voltar. Entretanto, admitindo-se que exista sempre um caminho ligando uma localidade a outra, na medida em que o número de localidades vai crescendo, o número de maneiras de se visitar todas as localidades cresce também. O problema de se determinar o caminho mais curto tal que todas as localidades sejam visitadas uma vez é conhecido como Problema do Caixeiro Viajante e é considerado um problema clássico da Otimização Combinatória (Christofides, 1979).

O PCV é NP-Completo (Lawler et al., 1985; Lenstra et al. 1985). Desta forma, é pouco provável que qualquer algoritmo, por mais eficiente que seja, encontre um caminho ótimo quando o número de localidades for grande e, além disso, a execução seja rápida. Embora seja difícil encontrar soluções ótimas para o PCV quando o número de localidades é muito grande, com o uso de heurísticas (métodos não exatos) é possível encontrar soluções viáveis que sejam muito próximas do ótimo. Além disso, é possível encontrar também uma solução não viável que forneça um limite inferior à solução ótima do PCV em questão. Isto pode ser feito através de uma relaxação (Lopes, 1992). Desta forma, a relaxação seria um limitante inferior e a solução viável dada por uma heurística seria um limitante superior da solução ótima do problema. Com estes limites, podemos então obter a solução ótima usando métodos exatos.

Uma das relaxações usada com sucesso para se encontrar o limite inferior da solução ótima para o PCV foi a proposta de Held e Karp, descrito por Held & Karp, (1970); Held & Karp, (1971). Em 1970 e 1971, Held & Karp publicaram trabalhos nos quais experimentaram a relaxação lagrangeana (Lopes, 1992) para fornecer limites inferiores para a solução ótima de problemas do caixeiro viajante. Estes limites obtidos eram muito próximos do ótimo.

Para definir a relaxação lagrangeana é descrita a seguir a formulação matemática do problema. Seja um grafo não direcionado  $G=(V,E)$  com  $n$  vértices, onde  $V=\{1,2,\dots,n\}$  e o conjunto de arcos  $E = \{(i,j) \text{ tal que } i,j \in V\}$  e seja  $c_{ij}$  o custo não negativo associado ao arco  $i-j$ . Seja  $S$  um subconjunto de  $V$  ( $S \subset V$ ) e  $x_{ij}$  as variáveis do problema, que se quer obter (solução do problema). O Problema do caixeiro viajante pode ser definido como

$$\begin{aligned}
 v(PCV) = \min & \quad \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij}x_{ij} \quad (\text{função objetivo}) \\
 & \quad \text{sujeito a} \quad \sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad i \in V \quad (2.1) \\
 PCV & \quad \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V \quad (2.2) \\
 & \quad \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset \quad (2.3) \\
 & \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i, j \in V \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

onde  $x_{ij} = 1$  se o arco  $i$ - $j$  (caminho da localidade  $i$  para a  $j$ ) pertence a solução e  $x_{ij} = 0$ , se o arco  $i$ - $j$  não pertence a solução.

A função objetivo do problema indica a minimização das distâncias ao se visitar todas as localidades e voltar a localidade de origem. A restrição (2.1) indica que, a partir da localidade  $i$ , deve-se ir a apenas uma localidade  $j$ ,  $j \in V - \{i\}$ . Analogamente, a restrição (2.2) indica que, a partir de uma localidade  $j$ , deve-se ir apenas a uma localidade  $i$ ,  $i \in V - \{j\}$ . A restrição (2.3) serve para eliminar ciclos dentro de todo o trajeto. Desta forma, se existe um conjunto  $S$  com  $k$  localidades,  $k < n$ , estas  $k$  localidades não serão interligadas de forma a existir um ciclo entre elas. O único ciclo que pode existir é o trajeto começando de uma localidade inicial, percorrendo as outras  $n-1$  localidades e voltando à localidade inicial. A restrição (2.4) indica que, para  $x_{ij} = 1$ , o arco que liga  $i$  a  $j$  é escolhido para fazer parte da solução. Se o valor for 0, então o arco que liga  $i$  a  $j$  não é escolhido para o trajeto.

O PCV é *simétrico* quando  $c_{ij} = c_{ji}$ , para todo  $i, j \in V$ . Sendo assim, o PCV simétrico pode ser definido como um grafo não direcionado completo  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , onde  $E$  é o conjunto de todos os arcos conhecidos de  $i$  a  $j$  ou  $a$   $i$ , e  $c_{ij} = c_{ji}$ . Desta forma, o PCV simétrico, doravante chamado de *PCVS*, pode ser definido como

$$\begin{aligned}
 v(PCVS) = \min & \quad \sum_{i \in V} \sum_{j > i} c_{ij}x_{ij} \quad (\text{função objetivo}) \\
 & \quad \text{sujeito a} \quad \sum_{j < i} x_{ij} + \sum_{j > i} x_{ij} = 2 \quad i \in V \quad (2.6) \\
 PCVS & \quad \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset \quad (2.7) \\
 & \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i, j \in V, j > i. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

A expressão (2.7) pode ser também escrita como

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} + \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in S \\ j > i}} x_{ij} \geq 2, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset \quad (2.9)$$

O PCVS vai ser o nosso caso de estudo devido ao fato de muitos problemas práticos de roteamento se inserirem nesta categoria. Entretanto, a abordagem continua válida para um caso genérico (quando  $c_{ij} \neq c_{ji}$ ).

Ao adicionar a restrição (2.6) à função objetivo tal como na relaxação lagrangeana e então maximizar a função objetivo como uma função de multiplicadores  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda \in \mathcal{R}^n$

obtm-se então a formulação matemática da relaxação lagrangeana para o PCVS definida como

$$v(L_\lambda PCVS) = \min \left\{ \sum_{i \in V} \sum_{j > i} (c_{ij} + \lambda_i + \lambda_j)x_{ij} - 2 \sum_{i \in V} \lambda_i \right\}$$

Feitas estas considerações, tem-se então a relaxação lagrangeana definida por:

$$v(L_{\lambda}PCVS) = \min \left\{ \sum_{i \in V} \sum_{j > i} (c_{ij} + \lambda_i + \lambda_j)x_{ij} - 2 \cdot \sum_{i \in V} \lambda_i \right\}$$

$(L_{\lambda}PCVS)$  sujeito a (2.9) e (2.8)

A relaxação Lagrangeana/surrogate para o PCVS, relaxa a restrição (2.6), tal como na relaxação lagrangeana, descrita anteriormente. Esta restrição é modificada conforme a relaxação surrogate, antes de ser adicionada à função objetivo. Desta forma, a restrição (2.6), após a relaxação surrogate, ficaria:

$$\sum_{i \in V} \lambda_i (\sum_{j < i} x_{ij} + \sum_{j > i} x_{ij}) = \sum_{i \in V} \lambda_i \cdot 2 = 2 \cdot \sum_{i \in V} \lambda_i$$

onde  $\lambda_i$

pertence ao conjunto dos números reais e  $i$  pertence ao conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Esta restrição é relaxada novamente, conforme o modo lagrangeano, e então adicionada à função objetivo. Seja  $t$ , um número real qualquer, o multiplicador lagrangeano. Desta forma, teríamos a seguinte formulação matemática para a *lagsur*, no que se refere ao PCVS:

$$v(L_{\lambda,t}PCVS) = \min \left\{ \sum_{i \in V} \sum_{j > i} (c_{ij} + t \cdot \lambda_i + t \cdot \lambda_j)x_{ij} - 2 \cdot \sum_{i \in V} t \cdot \lambda_i \right\}$$

$(L_{\lambda,t}PCVS)$  sujeito a (2.9) e (2.8)

Observe que, para  $t=1$ , tem-se que  $v(L_{\lambda,t}PCVS)$  é a própria relaxação lagrangeana  $(L_{\lambda}PCVS)$ . Desta forma, a relaxação lagrangeana é um caso particular da relaxação *lagsur*. Para se resolver a relaxação lagrangeana e a lagrangeana/surrogate, usa-se o algoritmo de subgradientes, versão II, descrito por Narciso & Lorena, (1996). Entretanto, a relaxação *lagsur* precisa buscar o melhor  $t$  possível, para um dado  $\lambda^*$  fixo, tal como descrito anteriormente. Na Fig. 1, a seguir, tem-se a representação qualitativa de um gráfico  $v(L_{\lambda,t}PCVS)$  versus  $t$ , para um valor fixo de  $\lambda^*$ . Neste gráfico, o valor de  $t$  que maximiza a função objetivo  $v(L_{\lambda,t}PCVS)$  é  $t^*$ .

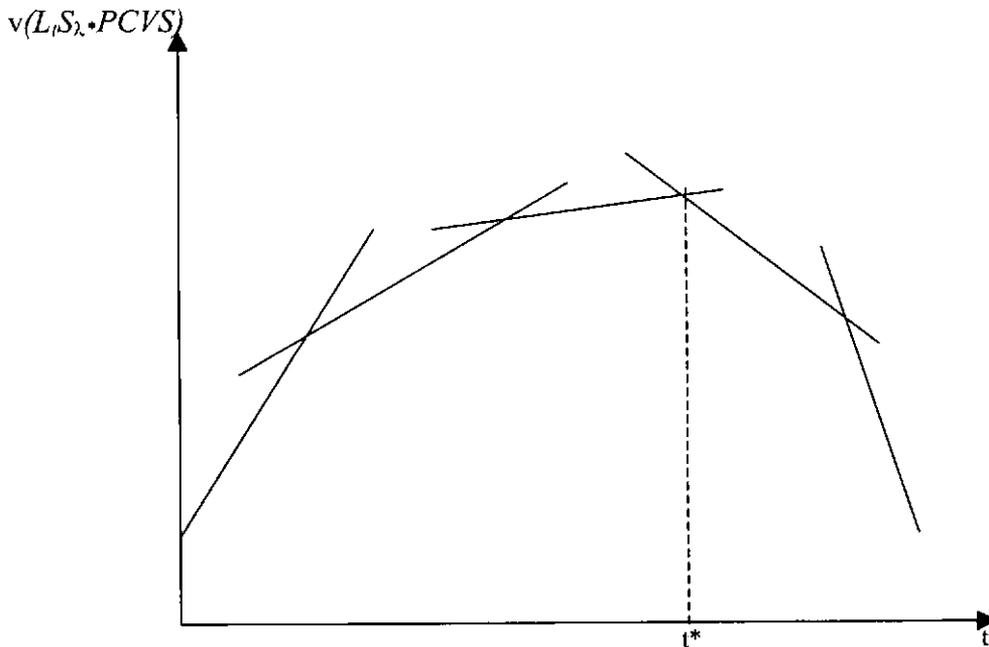


FIG. 1.  $v(L_{\lambda,t}PCVS)$  versus  $t$ .

Na Fig. 1,  $t^*$  é o ponto que deve ser obtido (melhor valor possível de  $t$ ). Entretanto, não se conhece nenhum ponto da curva. O único parâmetro que se tem é que a função é linear por partes. Para se obter um ponto da curva, é necessário resolver o lagsur. O algoritmo de busca do melhor  $t$ , usado para o lagsur, no caso do PCVS, está descrito a seguir.

### Algoritmo de busca do melhor $t$

**Dados** incremento = 1.5;  
 $k_{max} = 5$  (número máximo de iterações);  
 $t_1 := -\infty$  (limite inferior para o melhor  $t$ );  
 $t :=$  incremento (multiplicador lagrangeano/surrogate atual);  
 $t_2 := \infty$  (limite superior para o melhor  $t$ );  
 $v^* :=$  (melhor limite superior atual). Inicialmente,  $v^* := -\infty$ ;  
 $k := 0$  (número de iterações atual);  
delta = 0.50 (diferença entre  $t_2$  e  $t_1$ );

**Repita**  
Fazer  $k := k + 1$ ;  
Se  $k > k_{max}$  ou  $(t_2 - t_1) < delta$  então pare;  
Senão resolva  $(L, S_\lambda, PCVS)$   
Fim\_Se  
Se  $v(L, S_\lambda, PCVS) > v^*$  então  
Fazer melhor  $t = t$ ,  
 $v^* := v(L, S_\lambda, PCVS)$ ;  
Fim\_Se  
Calcule  $\Omega^\lambda = \sum_{i \in V} \lambda_i \cdot (d_i - 2)$  ( $d_i$  é o grau do vértice  $i$  e  $\Omega^\lambda$  é a inclinação da função lagsur);  
Se  $\Omega^\lambda < 0$  então  
 $t_2 = t$ ;  
 $t = t -$  incremento;  
Se  $t_1 \neq \infty$  ( $t_1$  já foi determinado) então  
incremento =  $(t_2 - t_1)/2.0$ ;  
 $t = t +$  incremento;  
Fim\_Se  
senão  
 $t_1 = t$ ;  
incremento = incremento\*2;  
 $t = t +$  incremento;  
Se  $t \geq t_2$  então  
 $t = t -$  incremento;  
incremento =  $(t_2 - t_1)/2.0$ ;  
 $t = t +$  incremento;  
Fim\_Se  
Fim\_Se  
Até ( condições de parada ).

Com o algoritmo de busca de melhor  $t$ , com um máximo de 5 iterações, obtém-se um valor de  $t$  tal que se aproxime muito de  $t^*$  ou seja o próprio  $t^*$ . Quando se aumenta o número de iterações para um valor maior que 5 (12, por exemplo), certamente se obtém o valor de  $t^*$  (melhor  $t$ ). Entretanto, o tempo gasto para isto comprometeria o tempo de execução do algoritmo. Daí o número de iterações ser 5, para não comprometer o tempo de execução da relaxação lagsur. Além disso, basta ter um valor de  $t$  tal que o resultado de  $v(L, S_\lambda, PCVS)$  (relaxação lagsur) seja melhor do que  $v(L, PCVS)$  (relaxação lagrangeana).

### 3. Resultados obtidos com as relaxações lagrangeana e *lagsur*

Para verificar o comportamento da relaxação *lagsur* e também da relaxação lagrangeana, foram usados problemas testes disponíveis em TSPLIB, (2001). Os resultados estão dispostos nas Tabelas de 1 a 2, para uma melhor visualização. Os problemas testes usados são aqueles que têm solução ótima conhecida. Em cada tabela, tem-se os seguintes campos:

**Num\_loc** - contém o número de localidades a serem consideradas

**t** - contém o tempo, em segundos, de execução para se resolver o dual lagrangeano/*lagsur*

**n\_iter** - contém o número de iterações para que o dual lagrangeano/*lagsur* venha a convergir

**10%, 5%,.....,0.1%** - contém o tempo necessário para a relaxação lagrangeano/*lagsur* venha a atingir a porcentagem de 10%, 5%,.....,0.1% de diferença em relação à solução ótima.

**gap1, gap2** - são definidos

como:

gap1 = (solução viável - relaxação)/solução ótima

gap2 = (solução ótima - relaxação)/solução ótima

Cada problema foi resolvido usando-se o algoritmo de subgradientes, versão II. A implementação foi em linguagem C. Os problemas foram executados em estação Sun Sparc Ultra 2, 128 Mbytes de memória, 167 Mhz.

#### 3.1. Resultados obtidos com a relaxação lagrangeana

TABELA 1. Lagrangeano para instâncias do PCVS com solução ótima conhecida.

Num_prob	t	gap1	gap2	10%	5%	4%
16	2.0	0.000230	0.000230	1.00	1.00	1.00
22	9.380	0.000123	0.000123	2.94	4.130	4.37
48	23.0	0.008141	0.002355	1.00	1.00	2.00
52	6.0	0.002132	0.002132	1.00	2.00	2.00
100	52.00	0.044380	0.018157	0.00	6.00	9.00
225	675.0	0.090032	0.039181	2.00	67.00	495.00
442	6469.0	0.067190	0.007115	2.00	527.00	754.00
1002	52420.0	0.030597	0.030597	6853.00	27475.00	36714.00
1291	56066.0	0.023840	0.023842	14.00	420.00	2376.00
1304	42816.0	0.040637	0.040637	4234.90	28094.30	--
1379	38018.0	0.015077	0.015077	9.90	1918.60	2826.10
1655	128326.0	0.022040	0.02204	40.18	6405.25	12701.90
1748	64421.0	0.040159	0.040159	9739.00	48413.00	--
1889	87629.0	0.049982	0.049982	10786.00	87568.00	--
2152	99230.0	0.012201	0.012201	21.40	21.40	2900.10

TABELA 1.1. Lagrangeano para instâncias do PCVS com solução ótima conhecida (continuação).

prob	n iter	3%	2%	1%	0.5%	0.4%	0.3%	0.2%	0.1%
16	289	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	2.00
22	487	4.64	4.87	6.34	7.71	7.98	8.40	8.71	9.10
48	1431	4.00	7.00	11.00	15.00	17.00	19.00	--	--
52	282	2.00	3.00	4.00	5.00	5.00	5.00	--	--
100	714	15.00	27.00	--	--	--	--	--	--
225	950	--	--	--	--	--	--	--	--
442	3000	1119.0	1810.0	4054.0	--	--	--	--	--
1002	3000	--	--	--	--	--	--	--	--
1291	3000	13431.	--	--	--	--	--	--	--
1304	3000	--	--	--	--	--	--	--	--
1379	2986	4412.8	9465.7	--	--	--	--	--	--
1655	3000	29368.	--	--	--	--	--	--	--
1748	3000	--	--	--	--	--	--	--	--
1889	3000	--	--	--	--	--	--	--	--
2152	3000	11413.	31334.	--	--	--	--	--	--

TABELA 2. Lagsur para instâncias do PCVS com solução ótima conhecida.

Prob	t	gap1	gap2	10%	5%	4%
16	1.10	0.000233	0.000233	0.17	0.19	0.20
22	7.00	0.006471	0.000096	1.01	1.16	1.20
48	8.00	0.009697	0.002988	0.15	1.00	1.00
52	6.50	0.002121	0.002121	0.33	1.00	1.00
100	28.00	0.050297	0.021871	0.56	3.00	3.00
225	652.00	0.098934	0.039154	2.28	83.00	392.00
442	997.00	0.084628	0.009726	1.95	82.00	92.00
1002	17856.00	0.011068	0.011068	455.50	869.50	1054.80
1291	15384.00	0.021880	0.021880	14.00	291.00	736.000
1304	15033.00	0.018360	0.018360	626.00	1511.00	2111.0
1379	12249.00	0.014109	0.014109	9.15	315.00	351.000
1655	128325.0	0.019877	0.019877	40.18	1251.000	1600.00
1748	64419.00	0.014932	0.014932	785.00	1802.00	2285.0
1889	87643.00	0.017504	0.017504	675.80	2275.40	3785.90
2152	99222.0	0.009182	0.009182	25.77	25.77	1106.0

TABELA 2.1. Lagsur para instâncias do PCVS com solução ótima conhecida (continuação).

Prob	n iter	3%	2%	1%	0.5%	0.4%	0.3%	0.2%	0.1%
16	264	0.22	0.89	0.93	1.00	1.00	1.00	1.00	1.03
22	372	1.28	1.41	1.72	2.02	2.36	2.52	3.94	4.67
48	521	1.00	3.00	6.00	7.00	7.00	8.00	--	--
52	309	1.00	4.00	5.00	5.00	5.00	5.00	--	--
100	373	4.00	14.00	--	--	--	--	--	--
225	882	--	--	--	--	--	--	--	--
442	506	110.00	152.00	997.00	--	--	--	--	--
1002	905	1428.4	2514.5	--	--	--	--	--	--
1291	618	3230.0	--	--	--	--	--	--	--
1304	1057	3678.0	9060.0	--	--	--	--	--	--
1379	962	440.0	3147.0	--	--	--	--	--	--
1655	3000	3029.0	42846.	--	--	--	--	--	--
1748	3000	3098.0	6716.0	--	--	--	--	--	--
1889	3000	9080.7	37393.	--	--	--	--	--	--
2152	3000	1805.0	3648.0	21829.	--	--	--	--	--

Para se atingir valores melhores (menor do que 1% da solução ótima quando o número de localidades é grande), seria necessário aumentar o número de iterações. Entretanto, a comparação é válida, visto que já se percebe um comportamento melhor da relaxação lagrangeana/surrogate em relação à relaxação lagrangeana pura (ver resultados para as localidades onde pode ser observado que os tempos são menores para a relaxação lagrangeana/surrogate).

Para uma melhor visualização do comportamento das relaxações *lagsur* e lagrangeana para o PCVS em cada iteração, tem-se as Fig. a seguir.

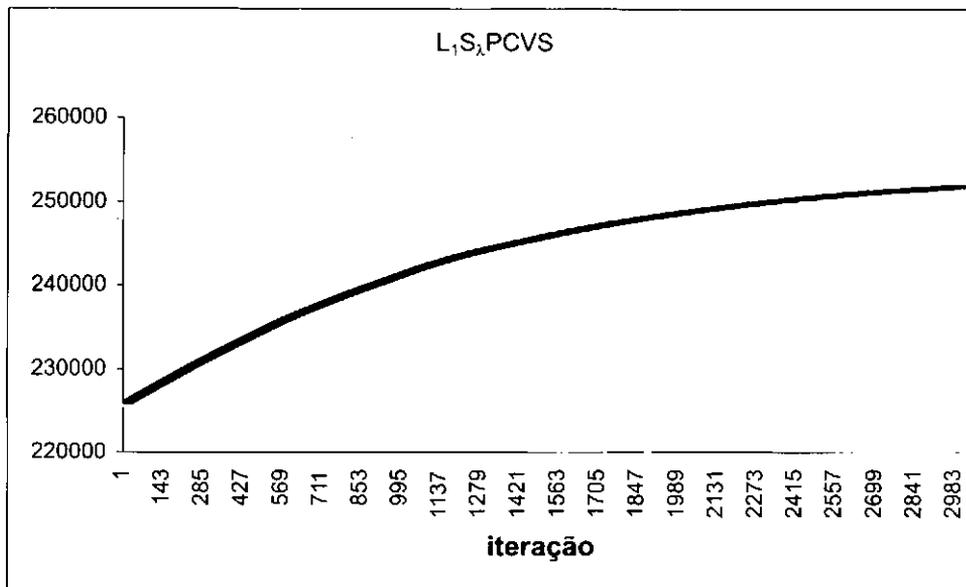


FIG. 2.  $(L_1 S_\lambda PCVS)$  versus iteração para 1.002 cidades.

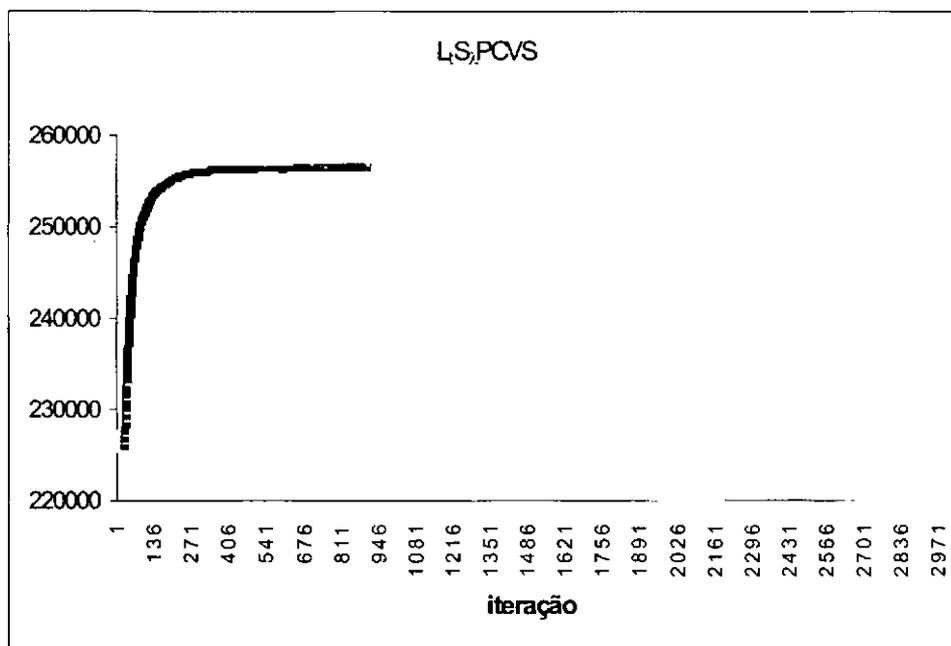


FIG. 3.  $(L_r S_\lambda PCVS)$  versus iteração para 1.002 cidades.

Nas instâncias usadas nos testes com a relaxação *lagsur* e a relaxação lagrangeana, foi observado que a seqüência de pontos (vide Fig. 2 e 3) fornecida pela relaxação lagrangeana era crescente e praticamente monótona. Contudo, a convergência é muito lenta. A relaxação *lagsur* converge mais rapidamente. No início da seqüência de pontos fornecida pela relaxação *lagsur*, o comportamento é instável e vai se estabilizando na medida em que o número de iterações vai crescendo. Geralmente, que os primeiros valores da seqüência fornecida pela relaxação *lagsur* são maiores do que os valores fornecidos pela relaxação lagrangeana, tal como exemplificado nos gráficos das duas relaxações (Fig. 1 e 2).

#### 4. Conclusão

Observando o gap2 nas tabelas, pode-se observar que a relaxação *lagsur* tem aproximadamente os mesmos valores para quando o dual da relaxação lagrangeana converge antes de 3.000 iterações. Quando o dual da relaxação lagrangeana não consegue convergir antes de 3.000 iterações, a relaxação *lagsur* é superior em termos de resultados. Isto pode ser melhor visto através dos campos "porcentagens" nas Tabelas de 1 a 2 (10% a 0.10%). Na maioria dos casos, a relaxação *lagsur* atinge a uma dada porcentagem em um número de iterações/tempo menor que a relaxação lagrangeana. Desta forma, ao se atingir 3.000 iterações, a relaxação lagrangeana não terá atingido ainda a uma dada porcentagem que a relaxação *lagsur* atinge. Em suma, a relaxação *lagsur* atinge valores mais próximos da solução ótima em menos iterações/tempo do que a relaxação lagrangeana.

A relaxação *lagsur* conseguiu nos testes computacionais, para um mesmo limite máximo de iterações, obter resultados mais próximos da solução ótima dos problemas que a relaxação lagrangeana.

No problema do caixeiro viajante, os resultados mostraram que a relaxação *lagsur* obtém resultados muito mais rapidamente do que a relaxação lagrangeana. Vale a pena mencionar que quanto mais lenta for a convergência, devido a característica de cada problema, mais nitidamente se nota o fato de que a relaxação *lagsur* fornece melhores resultados em menos tempo. Desta forma, para relaxações de convergência lenta no algoritmo de subgradientes, versão II, parece ser adequada a utilização da relaxação *lagsur* pois fornece bons resultados em menor tempo que a lagrangeana.

#### 5. Referências bibliográficas

ARSIG - Análise de Redes com Sistemas de Informações Geográficas. Disponível em:  
<<http://www.lac.inpe.br/~lorena/ArsigIndex.html>>. Acesso em 04 abr. 2001.

CHRISTOFIDES, N. **The traveling salesman problem: combinatorial optimization**. Chichester: Wiley, 1979.

FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method of solving integer programming problems. **Management Science**, v. 27, p. 1-18, 1981.

JAIKUMAR, R. A; FISHER, M. L. Generalized assignment heuristic for vehicle routing. **Networks**, v. 11, p. 109-124, 1981.

HELD. M.; KARP, R. M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees. **Operations Research**, v. 18, p. 1138-1162, 1970.

HELD. M.; KARP, R. M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees - Part II. **Mathematical Programming**, v. 1, p. 6-25, 1971.

LAWLER, E. L.; LENSTRA, J. K.; RINNOOY KAN, A. H. G. R.; SHMOYS, D. B. **The travelling salesman problem**. New York: John Wiley, 1985.

LENSTRA, J. K.; LAWLER, E. L.; RINNOOY KAN, A. H. G.; SHMOYS, D. D. **The traveling salesman problem**. New York: John Wiley, 1985.

LOPES, F. B. **Nova heurística para o problema de cobertura de conjuntos**. 1992. Tese (Mestrado em Computação Aplicada) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.

NARCISO, M. G.; LORENA, L. A. N. Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problem. **European Journal of Operational Research**, v. 114, n. 1, p.165-177, Apr. 1999

NARCISO, M. G.; LORENA, L. A. N. Relaxation heuristics for a generalized assignment problem. **European Journal of Operational Research**, v. 91, v. 1, p. 600-610, 1996.

TSPLIB [traveling salesman problem library]. Disponível na Internet:

<<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95>> . Acesso em: 04 abr. 2001.

**IMPRESSO**



---

*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária  
Centro Nacional de Pesquisa Tecnológica em Informática para a Agricultura  
Ministério da Agricultura e do Abastecimento  
Rua Dr. André Tosello, s/nº Caixa Postal 6041 - Barão Geraldo  
13083-970 - Campinas, SP  
Fone (19) 3789-5700 Fax (19) 3289-9594  
E-mail: sac@cnptia.embrapa.br  
<http://www.cnptia.embrapa.br>*

**MINISTÉRIO DA AGRICULTURA  
E DO ABASTECIMENTO**

