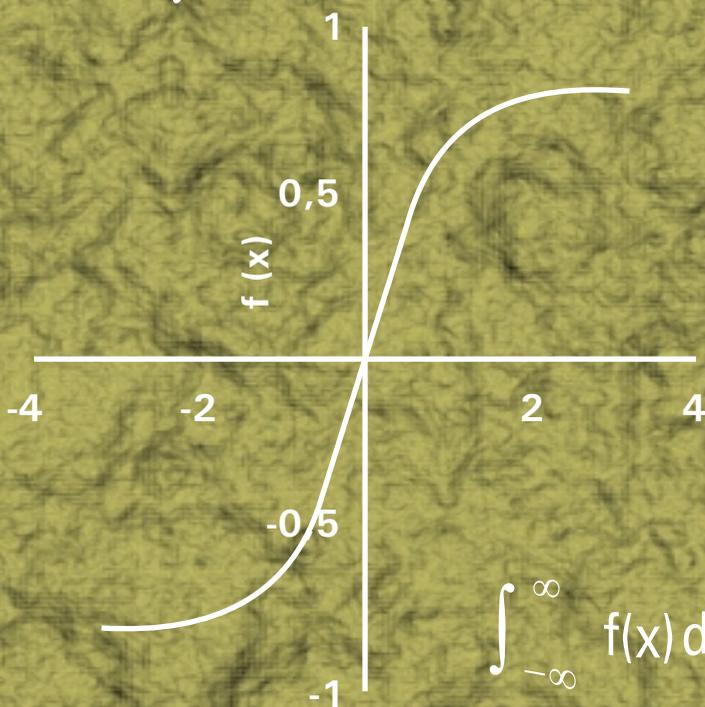


Uma Função Hiperbólica de Distribuição Probabilística de Alta Flexibilidade

$$p[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x) dx$$





*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
Embrapa Cerrados
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento*

ISSN 1517-5111

Dezembro, 2002

Documentos 79

Uma Função Hiperbólica de Distribuição Probabilística de Alta Flexibilidade

Daniel Pereira Guimarães

Planaltina, DF
2002

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

Embrapa Cerrados

BR 020, Km 18, Rod. Brasília/Fortaleza

Caixa Postal 08223

CEP 73310-970 Planaltina - DF

Fone: (61) 388-9898

Fax: (61) 388-9879

<http://www.cpac.embrapa.br>

sac@cpac.embrapa.br

Supervisão editorial: *Jaime Arbués Carneiro*

Revisão de texto: *Maria Helena Gonçalves Teixeira*

Jaime Arbués Carneiro

Normalização bibliográfica: *Rosângela Lacerda de Castro*

Tratamento das ilustrações: *Chaile Cherne Soares Evangelista*

Capa: *Leila Sandra Gomes Alencar*

Editoração eletrônica: *Leila Sandra Gomes Alencar*

Impressão e acabamento: *Divino Batista de Souza*

Jaime Arbués Carneiro

1ª edição

1ª impressão (2002): tiragem 100 exemplares

Todos os direitos reservados.

A reprodução não-autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei nº 9.610).

CIP-Brasil. Catalogação-na-publicação.
Embrapa Cerrados.

G963f Guimarães, Daniel Pereira.

Uma função hiperbólica de distribuição probabilística de alta flexibilidade / Daniel Pereira Guimarães. – Planaltina : Embrapa Cerrados, 2002.

40 p.— (Documentos / Embrapa Cerrados, ISSN 1517-5111; 79)

1. Probabilidade - função. 2. Estatística. I. Guimarães, Daniel Pereira. II. Título. III. Série.

519.2 - CDD 21

© Embrapa 2002

Autor

Daniel Pereira Guimarães

Eng. Florest., D.Sc., Manejo Florestal,
Embrapa Cerrados,
daniel@cpac.embrapa.br

Apresentação

As funções de distribuição probabilísticas apresentam fundamental importância para estimar a ocorrência potencial de eventos de ocorrência incerta e suas utilizações são crescentes em todas as áreas da ciência. O presente trabalho apresenta uma nova função de densidade de ampla aplicação, o que naturalmente terá ampla aplicabilidade para essas aplicações e ainda constituir importante ferramenta nos procedimentos de modelagem estatística. O autor buscou também fornecer informações adicionais sobre as principais distribuições probabilísticas existentes, o que deverá contribuir para a ampliação de suas aplicações na área agrícola.

Carlos Magno Campos da Rocha
Chefe-Geral da Embrapa Cerrados

Sumário

Introdução	9
Funções de Curvatura Rígida	11
Função Gompertz	11
Função Logística	13
Funções de Curvatura Flexível	15
Função Beta	15
Função Log-normal	15
Função Gama	16
Funções Richards e Logística Generalizada	17
Função Weibull	18
Desenvolvimento do Modelo	20
Aplicações do Modelo	22
Referências Bibliográficas	33
Abstract	40

Uma Função Hiperbólica de Distribuição Probabilística de Alta Flexibilidade

Daniel Pereira Guimarães

Introdução

As distribuições probabilísticas constituem conceitos fundamentais na estatística com aplicações práticas e teóricas cujas frequências esperadas de ocorrência da variável aleatória são estimadas pelas funções probabilísticas. Essas funções são classificadas, de acordo com as variáveis aleatórias envolvidas, como discretas em que o número de ocorrências é finito ou contínuas onde este é infinito. Dentre as principais distribuições probabilísticas discretas, tem-se as funções Discreta Uniforme, Bernoulli, Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica e Poisson.

As funções probabilísticas contínuas, também conhecidas como funções densidade de probabilidade (f.d.p.) podem ser agrupadas quanto aos picos de frequência (unimodal ou multimodais), simetria (simétricas ou assimétricas), tipo de curvatura (rígida ou flexível) e número de variáveis aleatórias (univariadas ou multivariadas).

Uma função probabilística contínua e univariada $f(x)$, objeto deste trabalho, apresenta as seguintes propriedades:

1) A probabilidade de x se situar entre dois pontos a e b é dada por:

$$p[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x) dx$$

2) A função é não negativa para todo o conjunto real de x ,

3) A integral da função probabilística (f.d.p.) é igual a 1, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

O emprego de funções densidade de probabilidade tem sido cada vez mais freqüente. Entre os fatores que contribuíram para a expansão do uso dessas funções, tem-se as facilidades de estimativa dos parâmetros dos modelos não lineares, decorrentes dos avanços da informática, os conceitos de Modelos Lineares Generalizados definidos por [Nelder e Wedderburn \(1972\)](#), em que modelos de regressão se baseiam em distribuições de erros não normais e as técnicas da modelagem de processos, especialmente no que se refere à dinâmica de populações.

Descrições detalhadas e os principais métodos de solução para a maioria das funções probabilísticas contínuas são encontrados em [Johnson et al. \(1994\)](#) e [Evans et al. \(2000\)](#). Embora exista na literatura grande número de funções probabilísticas contínuas e univariadas, em muitos casos a mesma função recebe diferentes denominações. A função de Gompertz é também denominada de função Gumbel, Log-Weibull, Fisher-Tippett ou Valor Extremo. A função Log-logística é também conhecida como função de Fisk ou Burr, a de Cauchy refere-se à mesma de Lorentz, a Logística Generalizada = Nelder, Log-Normal = Cobb-Douglas, Normal Inversa = Wald, Weibull = Frechet, Normal = Curva de Gauss, Gama = Wood, Richards = Chapman. Algumas funções referem-se apenas a casos particulares de outros modelos. As distribuições do Qui-quadrado e de Erlang são casos particulares da função Gama. A distribuição de Gilbrat refere-se à função Log-normal com média zero. Rayleigh é um caso específico da função Weibull assim como a função atribuída a Von Bertalanffy determina uma única curva da família de distribuições definidas pela função Richards.

Desse modo, pode-se afirmar que as principais distribuições probabilísticas univariadas e unimodais são:

- 1) **Simétricas:** Cauchy, Secante Hiperbólica, Laplace, Logística, Normal, Semi-circular, t de Student e Uniforme.
- 2) **Assimétricas de curvatura rígida:** Gompertz, Normal Inversa, Exponencial, Pareto, Distribuição F e Qui-quadrado.

3) **Curvatura flexível:** Log-normal, Beta, Gama, Log-logística, Logística Generalizada, Richards e Weibull.

As funções **F**, **t** de Student, Normal e Qui-quadrado definem distribuições-padrão e suas aplicações estão voltadas principalmente para testes de hipóteses. As distribuições exponencial e de Pareto não apresentam pontos de inflexão e descrevem somente curvaturas do tipo j-invertido.

Funções de Curvatura Rígida

As funções de curvatura rígida são aquelas que descrevem tendências definidas e apresentam pontos de inflexão constante. A curva normal, por exemplo, descreve sempre uma distribuição simétrica, e o ponto de inflexão ocorre na metade da distribuição. Entre as distribuições de curvatura rígida, merece destaque a função de Gompertz. Essa função de distribuição, enunciada por Benjamin Gompertz em 1825 para explicar as taxas de mortalidades humanas ([Gompertz, 1825](#)) é ainda uma das mais utilizadas em diversas áreas da ciência.

Função Gompertz

Forma cumulativa ou integral:

$$Y = \omega * e^{(-e^{(\alpha - \beta * X)})}$$

Sendo ω o parâmetro assintótico (e portanto igual à unidade quando o modelo representar uma distribuição probabilística), α o parâmetro de locação, β o parâmetro definidor da taxa de expansão e e a constante de Euler.

Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \omega * \beta * e^{(-e^{(\alpha - \beta * X)})} * \alpha - \beta * X$$

A forma assimétrica da distribuição, com o ponto de inflexão ocorrendo na posição $1/e = 0.37$ do parâmetro assintótico, faz com que essa função apresente bons resultados no ajuste de dados de crescimento de várias espécies animais e vegetais, além de grande aplicabilidade em outras áreas das ciências. A distribuição dos salários de uma população, por exemplo, tende a apresentar assimetria à direita ou positiva e o que conduz a uma distribuição com característica similar à descrita pela função Gompertz. Isso porque existe

pequeno número de indivíduos com altos salários enquanto a maioria apresenta baixos valores.

Muitas vezes, especialmente nos estudos de crescimento, um quarto parâmetro (θ) é inserido na função que passa a ser denominada de “Gompertz Modificada” com a seguinte configuração:

$$Y = \theta + \omega * e(-e(\alpha - \beta * X))$$

Outra opção é a adição de um parâmetro adicional (γ) objetivando transformar o modelo de curvatura rígida em modelo flexível, o que pode ser obtido por:

$$Y = \omega * e(-e(\alpha - \beta * X^\gamma))$$

Nesse caso, o modelo passa a descrever curvas assimétricas positivas com pontos de inflexão variando entre zero e a metade da distribuição, o que confere a essa distribuição um grau de flexibilidade semelhante ao obtido pela função Gama.

[Gottwald et al. \(1998\)](#) aplicaram o modelo de Gompertz para avaliar a ocorrência do vírus causador da “tristeza dos citros” na Costa Rica e República Dominicana. [Marin et al. \(1998\)](#) usaram essa função para modelar o crescimento dos fungos *Aspergillus* e *Penicillium* em milho. [Tedeschi et al. \(2000\)](#) verificaram que a função Gompertz foi superior às funções de Richards, Brody, Logística e Gompertz Modificada para o ajuste de dados de crescimento de bovinos da raça guzerá e seus cruzamentos. Outros exemplos são os estudos relativos ao crescimento de alface, cebola e beterraba ([Tei et al. 1996](#)), infestação de ervas-daninhas ([Webster e Cardina, 1999](#)), degradação de concentrados pelo rúmen de bovinos ([Susmel et al., 1999](#)) e crescimento de porcos ([Knap, 2000](#)). A função de Gompertz tem sido também utilizada em estudos envolvendo variáveis relacionadas às condições climáticas. [Abellana et al. \(1999\)](#) usaram a função Gompertz para avaliar os efeitos de estresse hídrico e da temperatura sobre o crescimento de fungos em farinha de trigo. [Xiong et al. \(1999\)](#) usaram a função Gompertz Modificada para avaliar os efeitos de temperatura, pH e concentrações de cloreto de sódio sobre a inibição do crescimento da bactéria *Listeria monocytogenes*. [Pollet et al. \(2000\)](#) usaram a função de Gompertz para simular os níveis de respiração da superfície requeridos para o ajuste do modelo de Penman-Monteith para a cultura de

alface em casas de vegetação. [Yue et al. \(1999\)](#) empregaram o modelo misto de Gompertz para proceder a avaliações de frequência de inundações na província de Quebec, Canadá. [Silva et al. \(1999\)](#) usaram a função Gompertz para estimar curvas de intensidade-duração-freqüência da precipitação para os Estados do Rio de Janeiro e Espírito Santo com base em dados diários obtidos por pluviômetros. Os parâmetros da função Gompertz foram espacializados pelo método de “kriging”, ([Sansigolo e Nery, 2000](#)), para o mapeamento das distribuições das temperaturas mínimas no Estado do Paraná. [Melo et al. \(2001\)](#) aplicaram a função Gompertz para estimar as precipitações máximas diárias em séries históricas do Município de Lavras, MG.

Função Logística

A função logística, descrevendo uma curva sigmoideal simétrica, é outra função probabilística amplamente utilizada. Seu modelo é:

Forma cumulativa ou integral:

$$Y = \omega / (1 + e^{(\alpha - \beta * X)})$$

Sendo ω o parâmetro assintótico (e, portanto, igual a unidade na fdp), α o parâmetro de locação e β o parâmetro definidor da taxa de expansão.

Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \omega * \beta * e^{(\alpha + \beta * X)} / (e^{(\alpha)} + e^{(\beta * X)})^2$$

Inicialmente, sua principal utilização foi para os estudos de crescimentos populacionais. [Li et al. \(2000\)](#) usaram essa função para avaliar os efeitos da concentração de CO₂ e estresse hídrico sobre o enchimento de grãos de trigo. [Bedmar et al. \(1999\)](#) verificaram que a função logística foi superior à de Gompertz para determinar o período crítico para controle de ervas-daninhas na cultura do milho. [Godoy et al. \(1999\)](#) usaram a função logística para descrever os efeitos da umidade e da temperatura sobre o desenvolvimento da ferrugem no milho. [Garriz et al. \(1999\)](#) optaram pela função logística para explicar a tendência do crescimento dos frutos de pêra. [Almeida et al. \(2001\)](#) usaram a mesma metodologia para avaliar o efeito da temperatura sobre o crescimento populacional de moscas.

Por sua vez, a simplicidade do modelo, a simetria da função e a obtenção do *logit* pelo processo de linearização da função de distribuição cumulativa, deram novas perspectivas de uso da função logística. [Medeiros et al. \(2000\)](#) avaliaram a efetividade da função logística em modelos auto-regressivos. [Grundy & Mead \(2000\)](#) aplicaram a regressão logística para simular o efeito de variáveis meteorológicas sobre o crescimento de ervas-daninhas. A regressão logística é um exemplo de Modelo Linear Generalizado que envolve uma função não linear e uma distribuição não normal. A regressão logística é usada quando o evento é uma proporção com distribuição binomial e cuja média é predita por outros fatores. Nas ciências médicas têm-se usado amplamente a regressão logística, principalmente, para definir índices de severidades de doenças em função de fatores de risco. [Gumpertz et al. \(2000\)](#) usaram o modelo de regressão logística para estimar os riscos de surtos de pragas em plantações de Pinus no Sudeste dos Estados Unidos, adotando variáveis binárias (presença ou ausência da praga) em relação a variações espaciais e temporais. [Tourenq et al. \(2001\)](#) avaliaram os riscos de danos de aves aquáticas (flamingos) sobre plantações de arroz no Sudeste da França combinando as técnicas de funções discriminantes, regressão logística e redes neurais.

Na Figura 1, observam-se as tendências esperadas para as funções de Gompertz e logística.

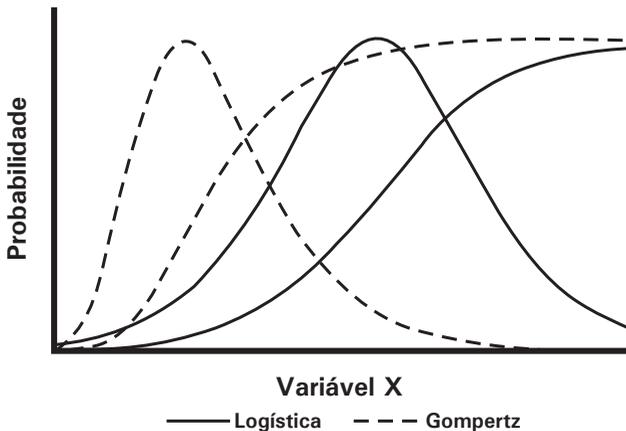


Figura 1. Distribuições probabilísticas e respectivas formas cumulativas determinadas pelas funções de Gompertz e Logística.

Funções de Curvatura Flexível

Ao invés de descrever apenas uma curva característica, as funções probabilísticas de curvatura flexível descrevem famílias de curvas com diferentes pontos de inflexão. As principais funções univariadas de curvatura flexível são Beta, Log-normal, Gama, Richards e Weibull.

Função Beta

A função Beta tem sua utilização limitada pelo fato de não apresentar função cumulativa de densidade, não fornecer estimativas para $X = 0$ (origem) e de ter sua aplicação dependente da variação do eixo X entre os limites de 0 e 1. Sua função densidade de probabilidade (fdp.) é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

No modelo, Γ é a função Gama, e os parâmetros α e β definem a forma da distribuição. Se $\alpha = \beta$, a distribuição é simétrica, se $\alpha > \beta$ a assimetria é negativa e no caso de $\alpha < \beta$, sua assimetria é positiva.

[Assis et al. \(1996\)](#) demonstram sua aplicabilidade para estimar a distribuição de frequência de "Índices de Seca" em Piracicaba, São Paulo. [Bassanezi et al. \(1998\)](#) usaram a função Beta para relacionar a severidade de ataque do vírus do mosaico em folhas de feijão em função da temperatura.

Função Log-Normal

A função Log-normal, conforme indicado pelo próprio nome, refere-se à função cuja transformação logarítmica da variável X apresenta distribuição normal a qual, de maneira análoga à distribuição normal, apresenta a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{X \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(X) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]}$$

Uma limitação de uso da função Log-normal refere-se ao fato de descrever somente curvas com assimetria positiva. [Sampaio et al. \(2000\)](#) optaram pela distribuição Log-normal para estudar a precipitação efetiva em Lavras, MG.

[Kosugi e Hopmans \(1998\)](#) propuseram uma metodologia para padronização de curvas de retenção da água no solo em função da porosidade usando a distribuição Log-normal. Vários autores, citados por [Lima & Silans \(1999\)](#) reportam que a condutividade hidráulica dos solos tende a seguir essa distribuição. [Numelin \(1998\)](#) aplicou a função Log-normal para descrever a distribuição de insetos em uma floresta tropical e [Machado et al. \(1998\)](#) para estudar a distribuição de diâmetros de Araucária em florestas secundárias no Sul do Brasil.

Função Gama

A função Gama refere-se a uma generalização da função fatorial e foi introduzida em 1729, juntamente com a função Beta, pelo notável matemático Leonard Euler, com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \cdot e^{(-x/\beta)}$$

No modelo, β refere-se ao parâmetro de escala e α é o parâmetro determinante da forma da distribuição. A função Gama descreve sempre curvas de assimetria positiva, tendo a distribuição normal como limite extremo.

No Brasil sua aplicação tem-se dado com maior freqüência em trabalhos relativos a estudos meteorológicos os quais tiveram impulso a partir dos resultados de [Vivaldi \(1973\)](#). [Ribeiro & Lunardi \(1996\)](#) estimaram as probabilidades mensais de chuva em Londrina, PR, por meio da função Gama. [Oliveira et al. \(2000\)](#) empregaram a função Gama completa para estimar as probabilidades de precipitação em períodos decenais de cinco localidades do Estado de Minas Gerais. [Macena et al. \(1998\)](#) aplicaram essa distribuição para estimar e espacializar a disponibilidade hídrica no Estado de Goiás. [Faria et al. \(2000\)](#) estimaram a demanda de irrigação suplementar para a cultura do milho no Estado de Minas Gerais com base nos valores estimados de precipitação obtidos pela distribuição Gama. Saad e Frizzone (1998) propuseram o dimensionamento de equipamentos de irrigação, pelo ajuste da função Gama às freqüências das intensidades de precipitação na região de Piracicaba, SP. [Gottschalk e Weingartner \(1998\)](#) estimaram parâmetros de escoamento superficial a partir de distribuições de precipitações pluviométricas determinadas pela distribuição Gama. [Bishop e Stear \(2000\)](#) empregaram a distribuição Gama incompleta para

relacionar a deposição de ovos com a população de nematóides. [Souza Neto et al. \(1998\)](#) aplicaram essa função para simular as tendências das curvas de lactação de caprinos no Estado do Ceará. [El Faro et al. \(1999\)](#) usaram o mesmo modelo para explicar a tendência da curva de lactação de gado da raça Caracu.

Funções Richards e Logística Generalizada

As funções de Richards ([Richards, 1959](#)) e a Logística Generalizada ou função de Nelder ([Nelder, 1961](#)) apresentam distribuições complementares de alta flexibilidade, representando generalizações das funções Monomolecular e Logística. Na forma cumulativa, tem-se as seguintes representações:

Função Richards:

$$Y = \omega * (1 - e^{(\alpha - \beta * X)})^\gamma$$

Função Logística generalizada:

$$Y = \omega / (1 + e^{(\alpha - \beta * X)})^\gamma$$

O parâmetro γ confere flexibilidade aos modelos originais de curvatura rígida (Monomolecular e Logística). Desse modo, a função Richards descreve famílias de curvas com pontos de inflexão variando desde zero até $1/e$, enquanto a Logística Generalizada descreve curvas com pontos de inflexão entre $1/e$ e 1. Assim, a função de Gompertz passa a ser o limite entre os dois modelos. Em suas formas derivadas, têm-se as seguintes funções densidade de probabilidade:

Função Richards:

$$f(x) = \omega * \beta * \gamma * (1 - e^{(\alpha - \beta * X)})^{(\gamma-1)} / (-1 + e^{(\alpha + \beta * X)})$$

Função Logística Generalizada:

$$f(x) = \omega * \beta * \gamma * (1 + e^{(\alpha - \beta * X)})^{(-1-\gamma)} * (e^{(\alpha - \beta * X)})$$

Na Figura 2, demonstra-se a flexibilidade das funções Richards e Logística Generalizada por diferentes tendências definidas, partindo-se de alterações no parâmetro de forma (γ) dessas funções probabilísticas.

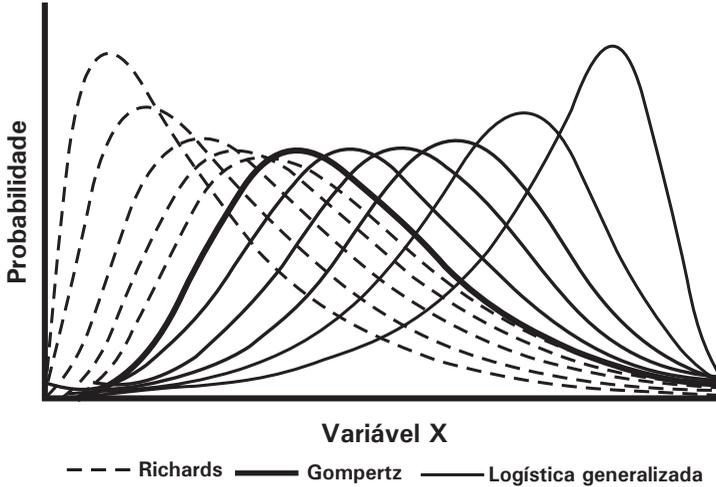


Figura 2. Distribuições probabilísticas determinadas pelas funções Richards e Logística Generalizada em relação à distribuição de Gompertz.

[Van Devender et al. \(1997\)](#) usaram a função Richards para simular as perdas na produtividade de arroz em função da intensidade de infestação de seis diferentes tipos de ervas-daninhas. [Hara \(2000\)](#) aplicou a função cumulativa de Richards para descrever a liberação de nitrogênio por meio de partículas encapsuladas de uréia. [Mata & Fierros \(2000\)](#) usaram essa função para estabelecer um modelo de crescimento e produção de *Pinus caribaea* var. hondurensis no México.

Função Weibull

Introduzida pelo cientista sueco Wallodi Weibull ([Weibull, 1951](#)), essa função é atualmente a mais empregada na área biológica e estudos atmosféricos, além de ampla utilização em outros ramos da ciência. Estudos relativos à frequência de ventos (meteorologia), durabilidade de equipamentos, resistência e fadiga de material têm a função Weibull como padrão de ajuste das tendências. Sua ampla aceitação está relacionada ao fato de descrever famílias de distribuições univariadas de assimetrias positivas e negativas (pontos de inflexão variando entre os intervalos de zero e $1-1/e$, o que equivale a aproximadamente 63% do

parâmetro assintótico) e sua forma simplificada de apresentação cuja função cumulativa de três parâmetros é dada por:

$$Y = \omega * (1 - e(-\beta * X^\gamma))$$

A adição do parâmetro de locação (quarto parâmetro) é feita pelo deslocamento do eixo das abcissas ($X-\alpha$). A função pode, portanto, ser configurada para utilização de dois, três ou quatro parâmetros. Quando o parâmetro definidor da forma da distribuição γ assume valores próximos de 3, a curva se assemelha à distribuição normal. Sua forma derivativa é:

$$f(x) = \omega * \beta * \gamma * X^{(\gamma-1)} * (e(-\beta * X^\gamma))$$

Na Figura 3, evidencia-se a flexibilidade da função Weibull e sua capacidade de descrever curvas de simetrias positiva e negativa.

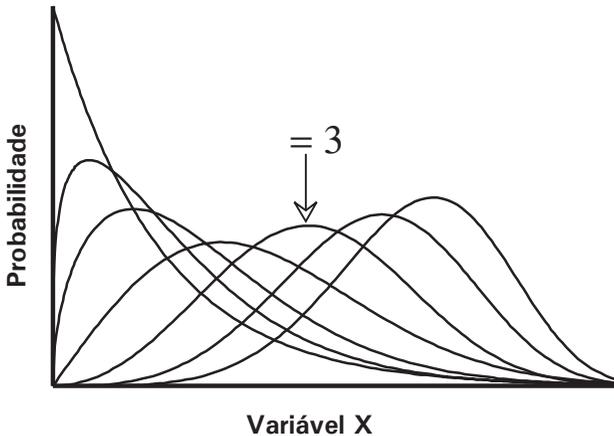


Figura 3. Distribuições probabilísticas determinadas pela função Weibull.

[Carisse et al. \(2000\)](#) aplicaram o modelo de Weibull para modelar os riscos de infecção de patógenos fúngicos em morangos em função da temperatura e umidade das folhas. Essa função foi empregada por [Osteras et al. \(2000\)](#) na avaliação da sensibilidade de espécies arbóreas à presença de cádmio; por [Forcella et al. \(2000\)](#) na avaliação do efeito de herbicidas sobre o comportamento de ervas-daninhas nas culturas de soja e milho e por [Lerin &](#)

[Koubaiti \(1997\)](#) para determinar a infestação de coleópteros em sementes de canola. [Cao \(1997\)](#) usou a função Weibull para estimar a mortalidade de árvores em plantações florestais de *Pinus taeda*; [Nanos et al. \(2000\)](#) para avaliar a produção de resina em plantações de *Pinus pinaster*; [Durrans et al. \(1998\)](#) demonstraram sua viabilidade para determinar padrões de testes de resistência de madeira enquanto [Mayer \(1999\)](#) empregou-a para modelar a ocorrência de incêndios florestais em plantações de *Pinus ponderosa* e [Everett et al. \(2000\)](#) em estudos para a reconstituição cronológica da ocorrência e intensidade de incêndios florestais desde a época de colonização dos Estados Unidos. No Brasil, [Machado et al. \(1998\)](#) empregaram a função Weibull para descrever a estrutura diamétrica de florestas naturais de araucária no sul do país e [Ferreira et al. \(1999\)](#) para avaliar os efeitos de intensidades de desbastes sobre a recuperação de florestas nativas no Estado de Minas Gerais. [Durr et al. \(1999\)](#) usaram a função Weibull como base para a modelagem de todo um sistema de produção de vacas leiteiras no Canadá e [Santos et al. \(1999\)](#) para simular o crescimento de cavalos pantaneiros. [Quine \(2000\)](#) baseou-se nessa função para estimar a probabilidade de riscos de vendavais na Inglaterra e [Zobeck et al. \(1999\)](#) para avaliar o efeito da erosão eólica sobre dispersão de partículas de poeira. Esse modelo foi também utilizado por [Santos e Guerrini \(1998\)](#) para avaliar o fluxo horizontal da água no solo, por [Tate e Freeman \(2000\)](#) para caracterizar os períodos de estiagem no Sudeste da África e por [Kelly & Krzysztofowicz \(2000\)](#) para estabelecer um relacionamento funcional entre a precipitação e a vazão de uma bacia hidrográfica nos Estados Unidos.

Desenvolvimento do Modelo

De maneira análoga, à função tangente a qual é resultante da razão entre as funções seno e coseno, a função tangente hiperbólica, denominada de **tanh**, é definida pela razão entre as funções seno hiperbólico (**senh**) e coseno hiperbólico (**cosh**), ou seja:

$$\tanh(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\text{cosh}(x)}$$

O que corresponde à:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

A função tangente hiperbólica, conforme mostrado na Figura 4, descreve uma distribuição probabilística de curvatura rígida passando pela origem.

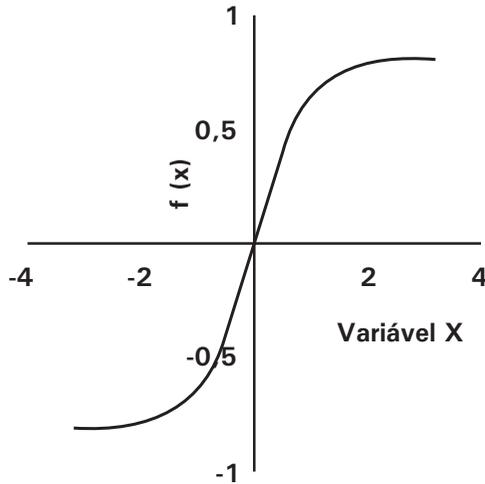


Figura 4. Distribuição probabilística da função tangente hiperbólica.

A adição de flexibilidade ao modelo é obtida pela substituição da variável X por uma função de potência, dando origem ao seguinte modelo:

$$Y = \tanh(\beta * X^\gamma)$$

Com a adição de um parâmetro definidor do limite assintótico e outro de escala, o modelo passa a ter da forma:

$$Y = \omega * \tanh(\beta * (X - \alpha)^\gamma)$$

Sendo conhecido o parâmetro ω , modelo passa a ser passível de linearização:

$$\text{Ln}(\text{atanh}(Y/\omega)) = \beta + \gamma * \text{Ln}(X)$$

O ponto de inflexão da distribuição, assim como na função Weibull, é determinado por:

$$I = \exp(-\text{Ln}(\beta)/\gamma) + \alpha$$

Quando a função é deslocada no eixo das abscissas (inclusão do parâmetro de locação α , o ponto de inflexão passa a ser calculado por:

O modelo gera distribuições com pontos de inflexão variando desde zero ($\gamma = 1$) até o limite superior definido por $I = \tanh(1) = 0.76$, o que confere a essa função uma flexibilidade superior à obtida pela função Weibull cujos pontos de inflexão variam entre zero e o limite de $I = (1-1/e) = 0.63$.

Sua forma derivativa apresenta a seguinte configuração:

$$f(x) = \omega * \beta * \gamma * X^{(\gamma-1)} * (1 - \tanh(\beta * X^\gamma))^2$$

Na Figura 5, pode-se observar as principais tendências das distribuições definidas pela função Hyper em sua forma derivada. Em sua forma integral, as curvas apresentam a configuração sigmoidal.

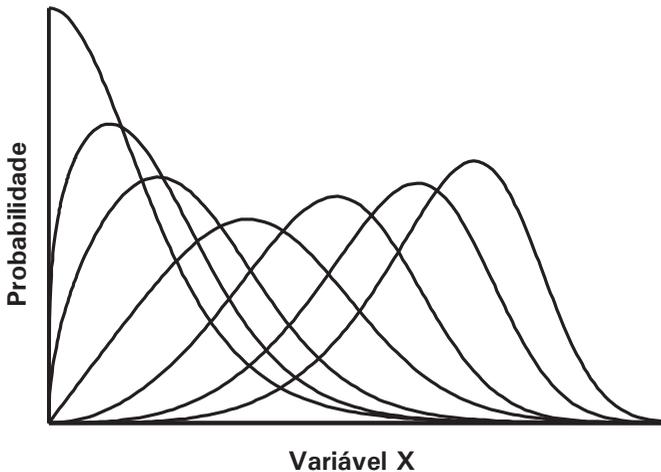


Figura 5. Distribuições probabilísticas determinadas pela função Hyper.

Aplicações do Modelo

Os exemplos a seguir visam a demonstrar a flexibilidade do modelo. Os dados foram obtidos de publicações técnicas e selecionados de forma a definir distribuições com as seguintes tendências:

Caso 1 - Distribuições com assimetria positiva,

Caso 2 - Distribuições com tendência similar à definida pela função de Gompertz,

Caso 3 - Distribuições com tendência similar à definida pela função Normal.

Caso 4 - Distribuições com assimetria negativa.

Em todos os casos, os resultados obtidos pelo ajuste da função Hyper foram comparados aos da função Weibull por meio da Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQR) e pelo coeficiente de determinação (R^2). Para o caso 2, a função de Gompertz foi também incluída na comparação dos resultados. Para o caso 3, incluiu-se também as funções logística e logística generalizada.

Tabela 1. Exemplos de distribuições com assimetria positiva.

Classes	Exemplo 1*			Exemplo 2		Exemplo 3	
	Idade	População	Frequência	Diâmetro	Gotas óleo	Tensão	Frequência
0 a 4 anos	4	15623784	9.95	0	0	1	177
5 a 9 anos	9	16395934	10.44	1	51	2	490
10 a 14 anos	14	17515836	11.15	2	37	3	552
15 a 19 anos	19	16678519	10.62	3	30	4	510
20 a 24 anos	24	14408060	9.17	4	13	5	424
25 a 29 anos	29	12967361	8.26	5	6	6	312
30 a 34 anos	34	12391224	7.89	6	2	7	199
35 a 39 anos	39	10883880	6.93	7	3	8	149
40 a 44 anos	44	9238721	5.88	8	1	9	74
45 a 49 anos	49	7445342	4.74			10	46
50 a 54 anos	54	5868429	3.74			11	29
55 a 59 anos	59	4842972	3.08			12	23
60 a 64 anos	64	3992715	2.54			13	6
65 a 69 anos	69	3230631	2.06			14	4
70 a 74 anos	74	2266843	1.44			15	4
75 a 79 anos	79	1454781	0.93			16	1
80 anos e mais	84	1453708	0.93				
Idade Ignorada		411423					

* Os dados foram ajustados pelas funções Hyper e Weibull de 3 ou 4 parâmetros, fornecendo os resultados apresentados na [Tabela 2](#).

Para o exemplo 1, os dados referem-se à distribuição da população brasileira em classes de idade tendo como base o censo do IBGE em 1996 (www.ibge.gov.br). O exemplo 2 utiliza dos dados empregados pelos softwares SigmaScan para estimar o tamanho das gotas de óleo em suspensão e TableCurve para determinar a distribuição de melhor ajuste (http://www.spssscience.com/White_Papers/oil_droplet_size.cfm). Entre todas as 3665 funções disponíveis no programa TableCurve, a Weibull foi selecionada como a que melhor descrevesse a tendência observada. No exemplo 3 utilizam-se os dados concernentes a resistência à tensão das fibras de algodão indiano, citados no trabalho original de proposição da função Weibull ([Weibull, 1951](http://www.ijerph.in/papers/vol11/Weibull_1951.pdf)).

Tabela 2. Resultados do ajuste das funções Hyper e Weibull a dados representativos de distribuições apresentando simetria positiva (Caso 1).

Parâmetro	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3	
	Hyper	Weibull	Hyper	Weibull	Hyper	Weibull
$\omega =$	526.4	527.3	167.2	160.9	2977.1	2969.1
$\beta =$	0.01446	0.00939	0.29892	0.308255	0.13175	0.10800
$\gamma =$	1.11643	1.31528	1.09713	1.380103	1.27357	1.59050
$\alpha =$	-	-	-	-	0.97749	0.83110
SQR =	1.06	1.64	35.61	37.29	570.10	615.87
$R^2 =$	0.9951	0.9924	0.9874	0.9868	0.9991	0.9990

Nas Figuras 6, 7 e 8, ilustram-se a capacidade de a função Hyper descrever distribuições com simetrias positivas.

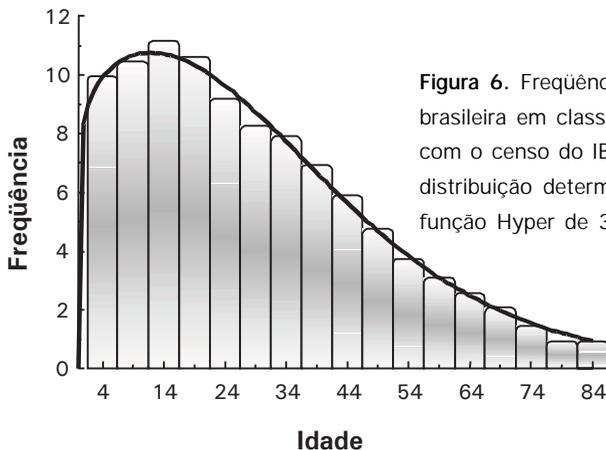


Figura 6. Frequência da população brasileira em classes de idade de acordo com o censo do IBGE em 1996 e distribuição determinada pelo ajuste da função Hyper de 3 parâmetros.

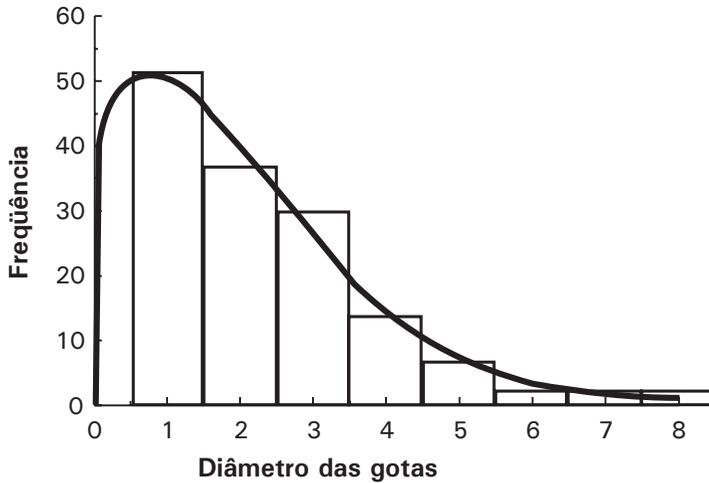


Figura 7. Frequência de gotas de óleo em suspensão estimadas pelo software SigmaScan e distribuição determinada pela função Hyper de 3 parâmetros.

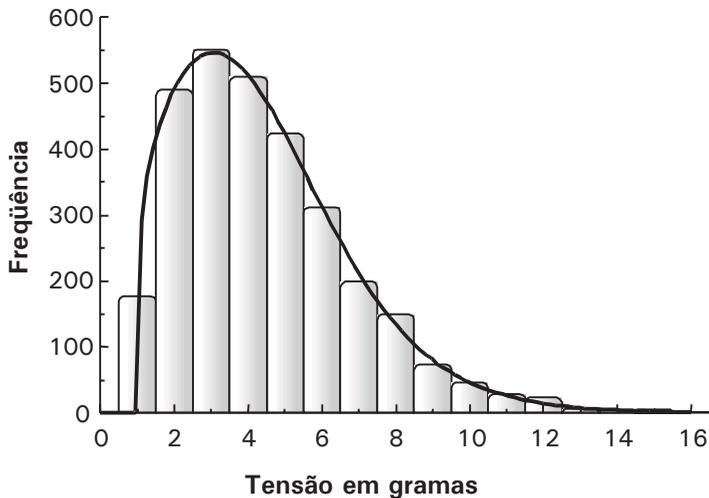


Figura 8. Frequência das fibras de algodão indiano em relação à tensão de rompimento e a distribuição determinada pelo ajuste da função Hyper de 4 parâmetros.

Fonte: [Weibull, 1951](#).

Tabela 3. Exemplos de distribuições com assimetria similar à definida pela função de Gompertz.

	Dias	Tratamento 1*	Tratamento 2	Tratamento 3	Tratamento 4	Tratamento 5
	7	142.47	146.17	139.34	138.22	144.15
	14	359.72	313.07	246.45	326.16	282.78
	21	740.21	705.06	574.75	707.11	649.66
	28	1199.56	1179.31	1027.54	1174.85	1139.72
	35	1776.65	1747.45	1574.42	1729.56	1700.91
	42	2325.3	2249.54	2116.18	2241.15	2210.37

* Os dados da Tabela 3 correspondem aos resultados obtidos por [Mazzuco et al. \(2000\)](#) e referem-se ao efeito de diferentes dietas alimentares sobre o crescimento de frangos de corte. Uma vez que o crescimento de frangos se inicia a partir de um valor inicial (peso ao nascer), optou-se por adicionar um valor fixo de 50 gramas para as estimativas iniciais das funções Hyper e Weibull permitindo que essas funções apresentassem o mesmo número de parâmetros da função de Gompertz. Os modelos comparados, nesse caso, correspondem às formas integrais, sendo:

$$\text{Função Hyper: } Y = \omega * \tanh(\beta * X^\gamma)$$

$$\text{Função Weibull: } Y = \omega * (1 - e^{-(\beta * X^\gamma)})$$

$$\text{Função Gompertz: } Y = \omega * e^{-(e - \beta * X)}$$

Tabela 4. Ajuste das funções Hyper, Weibull e Gompertz aos dados de crescimento de frango de corte de [Mazzuco et al. \(2000\)](#).

Função	Tratamento	SQR	R ²	ω	α	β	γ
Hyper	1	492.97	0.9999	3806.67	-	0.00051	1.93040
Hyper	2	1426.49	0.9995	3028.35	-	0.00037	2.08960
Hyper	3	2252.36	0.9993	3044.51	-	0.00019	2.24890
Hyper	4	579.56	0.9998	3159.88	-	0.00042	2.03540
Hyper	5	1854.49	0.9994	2891.90	-	0.00026	2.19980
Weibull	1	754.63	0.9998	5147.72	-	0.00029	2.03200
Weibull	2	1925.12	0.9995	3549.92	-	0.00021	2.25960
Weibull	3	2647.43	0.9991	3746.54	-	0.0001	2.40170
Weibull	4	884.85	0.9997	3812.46	-	0.00024	2.18670
Weibull	5	2406.60	0.9993	3329.32	-	0.00014	2.39050
Gompertz	1	464.26	0.9999	5004.24	1.57880	0.04396	-
Gompertz	2	1744.70	0.9995	4334.87	1.62557	0.04887	-
Gompertz	3	2822.80	0.9991	5073.22	1.68125	0.04332	-
Gompertz	4	637.97	0.9998	4409.65	1.60977	0.04769	-
Gompertz	5	2675.41	0.9992	4368.22	1.66439	0.04891	-

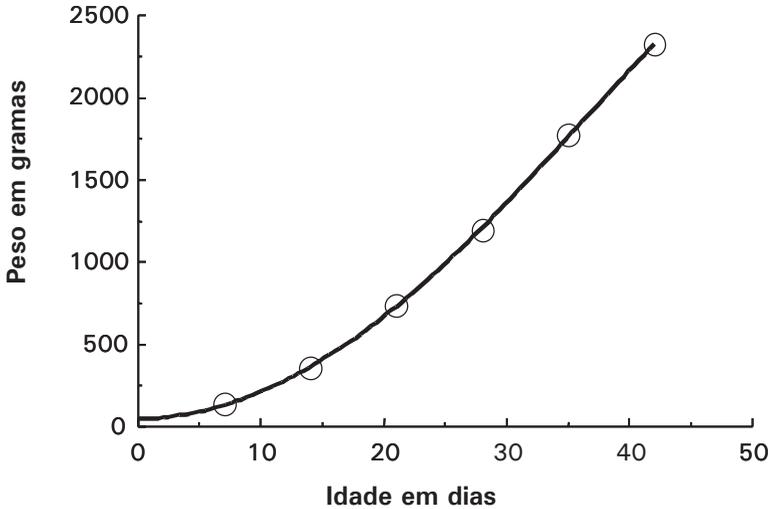


Figura 9. Crescimento de frangos de corte (tratamento 1) e a tendência determinada pelo ajuste da função Hyper.

Fonte: [Mazzuco et al., 2000.](#)

Analisando-se os resultados verifica-se que o excelente ajuste de todas as funções para explicar as tendências de crescimento dos frangos submetidos às diferentes dietas alimentares. Exceto para o tratamento 1 no qual a menor soma de quadrados dos resíduos foi obtida pela função de Gompertz, em todos os demais tratamentos a função Hyper forneceu as melhores estimativas de ajustamento aos dados. Para todos os casos, os valores assintóticos obtidos para a função Hyper foram menores que os verificados para as demais funções, o que indica a determinação de diferentes tendências de crescimento.

Tabela 5. Exemplos de distribuições com assimetria similar à definida pela curva Normal.

Chuvvas em Pelotas, RS			Fly ash		Garotas de Varsóvia			
Classe	X	Frequência	X	Frequência	Idade	N1	N2	%
783	1	7	2	3	9.21	376	0	0
991	2	18	3	11	10.21	200	0	0
1199	3	27	4	20	10.58	93	0	0

Continua...

Tabela 5. Continuação.

Chuvas em Pelotas, RS			Fly ash		Garotas de Varsóvia			
Classe	X	Frequência	X	Frequência	Idade	N1	N2	%
1407	4	29	5	22	10.83	120	2	0.02
1615	5	11	6	29	11.08	90	2	0.02
1823	6	5	7	41	11.33	88	5	0.06
2031	7	2	8	24	11.58	105	10	0.10
2239	8	1	9	25	11.83	111	17	0.15
			10	13	12.08	100	16	0.16
			11	9	12.33	93	29	0.31
			12	5	12.58	100	39	0.39
			13	6	12.83	108	51	0.47
			14	3	13.08	99	47	0.47
					13.33	106	67	0.63
					13.58	105	81	0.77
					13.83	117	88	0.75
					14.08	98	79	0.81
					14.33	97	90	0.93
					14.58	120	111	0.93
					14.83	102	95	0.93
					15.08	122	117	0.96
					15.33	111	107	0.96
					15.58	94	92	0.98
					15.83	114	112	0.98
					17.58	1049	1049	1.00

Os dados referentes à distribuição de chuvas em Pelotas, RS foram obtidos de [Assis et al. \(1996\)](#) e os dados relativos ao tamanho das cinzas de carvão siderúrgico ("fly ash") foram obtidos do trabalho original de [Weibull \(1951\)](#). Estes resíduos do setor siderúrgico são normalmente usados para o fabrico de cimento. No primeiro caso, usou-se as funções Hyper e Weibull de 2 parâmetros (passando pela origem e com valor assintótico em bases percentuais). No caso dos resíduos siderúrgicos, os modelos de 4 parâmetros foram utilizados na análise. Os resultados dos ajustamentos dos modelos são apresentados na [Tabela 6](#) e as [Figuras 9](#) e [10](#) ilustram a capacidade da função Hyper em descrever distribuições com configurações semelhantes à distribuição normal. Os dados relativos às garotas de Varsóvia são provenientes do trabalho de

[Milicer & Szczotka \(1966\)](#) e indicam a idade de ocorrência da menarca (primeira menstruação) em garotas de Varsóvia, Polônia. Na área médica, estes estudos são importantes para o relacionamento da menarca com fatores relativos à obesidade ou incidência de câncer. A análise desse conjunto de dados constitui um marco importante nos estudos estatísticos, pois serviram de base para o trabalho de [Aranda-Ordaz \(1981\)](#) acerca das transformações *probit* e *logit*. Nesse caso, os modelos foram avaliadas na forma integral e as funções comparadas foram a logística, logística generalizada, Weibull e Hyper. Os resultados do ajustamento são apresentados na [Tabela 7](#) e a [Figura 11](#) ilustra a aplicação da função Hyper à distribuição observada.

Tabela 6. Ajuste das funções Hyper e Weibull aos dados de frequência de chuvas em Pelotas ([Assis, 1996](#)) e partículas de cinzas de carvão siderúrgico ([Weibull, 1951](#)).

Parâmetro	Chuva em Pelotas		Fly ash	
	Weibull	Hyper	Weibull	Hyper
$\omega =$	100 (fixo)	100 (fixo)	206.76	206.29
$\beta =$	0.02033	0.02795	0.00484	0.01707
$\gamma =$	2.8995	2.4559	2.7521	2.0638
$\alpha =$	-	-	0.8672	1.5712
SQR =	27.42	19.24	159.2	152.32
$R^2 =$	0.9675	0.9772	0.9025	0.9067

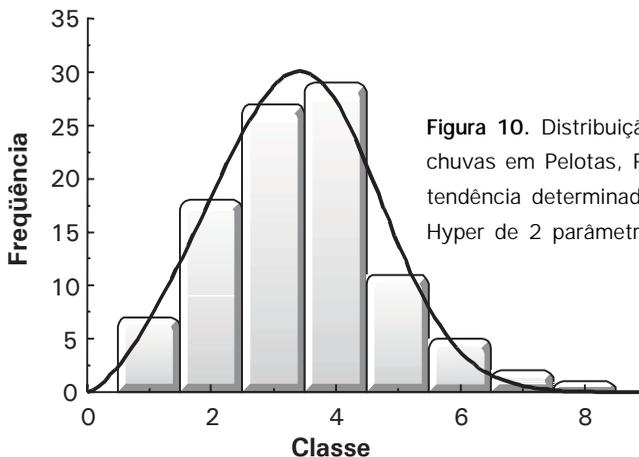


Figura 10. Distribuição da frequência de chuvas em Pelotas, RS ([Assis, 1996](#)) e a tendência determinada pelo ajuste da função Hyper de 2 parâmetros.

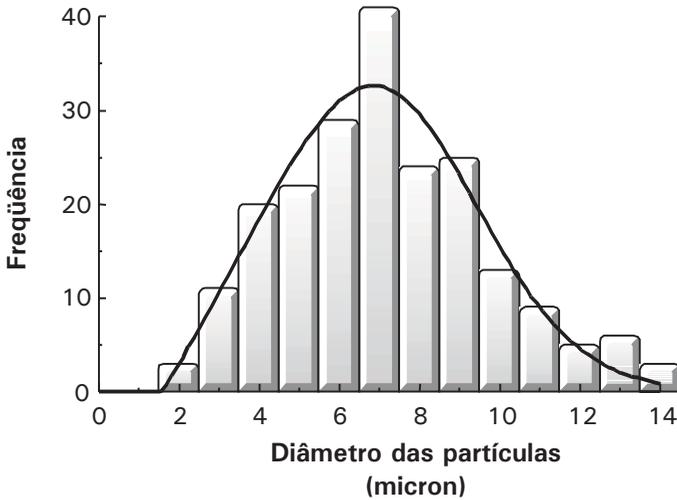


Figura 11. Distribuição de frequência das partículas de cinzas de carvão siderúrgico ([Weibull, 1951](#)) e a tendência determinada pelo ajuste da função Hyper de 4 parâmetros.

Tabela 7. Ajuste das funções logística, logística generalizada, Weibull e Hyper aos dados de frequência da menarca das meninas de Varsóvia ([Milicer & Szcotka, 1966](#)).

	Logística	Logística generalizada	Weibull	Hyper
$\omega =$	1 (fixo)	1 (fixo)	1 (fixo)	1 (fixo)
$\alpha =$	20.0444	16.7766	10.3285	10.5820
$\beta =$	1.5446	1.34584	0.05237	0.09359
$\gamma =$	-	1.64234	2.67653	2.04411
$R^2 =$	0.99473	0.99524	0.99540	0.99550
$SQR =$	0.01997	0.01802	0.01729	0.01721

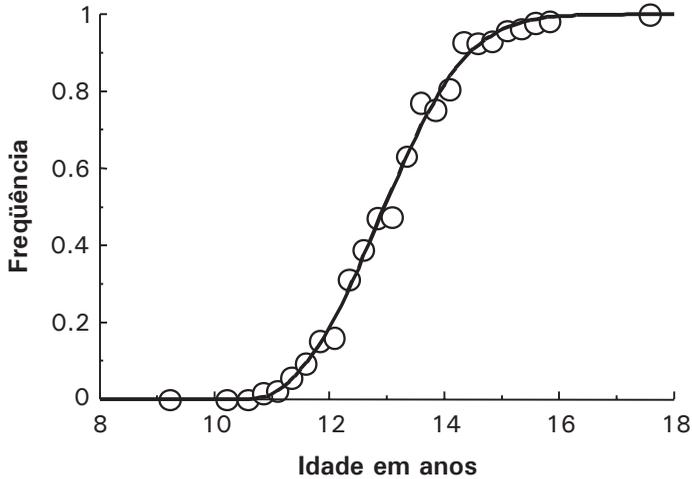


Figura 12. Distribuição de frequência da menarca das garotas de Varsóvia (Milicer & Szczotka, 1966) e a tendência determinada pelo ajuste da função Hyper.

Tabela 8. Exemplos de distribuições com assimetria negativa.

Focos de incêndios no Brasil de acordo com o INPE					
mês	x	2000	Frequência	2001	Frequência
janeiro	1	1997	1.84	560	0.38
fevereiro	2	2666	2.45	1139	0.78
março	3	850	0.78	1510	1.03
abril	4	431	0.40	1112	0.76
maio	5	2273	2.09	2112	1.44
junho	6	6316	5.81	8461	5.79
julho	7	4933	4.54	6762	4.62
agosto	8	24234	22.29	32911	22.51
setembro	9	24775	22.79	39303	26.88
outubro	10	27102	24.93	31245	21.37
novembro	11	8496	7.81	15504	10.60
dezembro	12	4645	4.27	5612	3.84
Total		108718	100	146231	100

Os dados apresentados na Tabela 6 referem-se aos valores disponibilizados pelo CPTEC/INPE no site www.cptec.inpe.br/products/queimadas/queimabrasilacu.html e representam o número de focos de calor mensalmente

captados por meio de imagens de satélite no Brasil nos anos de 2000 e 2001. As funções Hyper e Weibull de 2 parâmetros (passando pela origem e valor assintótico igual a 100) foram ajustadas aos dados. Os resultados obtidos são apresentados na [Tabela 7](#) e ilustrados na [Figura 12](#).

Tabela 9. Resultados do ajuste das funções Hyper e Weibull para explicar a frequência das ocorrências de focos de incêndio no Brasil (www.inpe.gov.br)

	ano 2000		ano 2001		
	Hyper	Weibull	Hyper	Weibull	
ω	100 Fixo	100 Fixo	A =	100 Fixo	100 Fixo
β	2.11E-06	1.45E-06	B0 =	3.29E-06	1.07E-06
γ	5.67574	5.95155	B1 =	5.49212	6.09376
SQR	85.96	110.33	SQR =	64.79	77.51
R ²	0.9097	0.8842	R ² =	0.9376	0.9254

Os resultados evidenciam a melhor capacidade de ajuste da função Hyper aos dados cujas distribuições apresentam assimetria negativa. Isto se deve a maior flexibilidade desta função probabilística. Verifica-se que, embora o ano de 2001 tenha apresentado um número maior de focos de incêndio que o ano de 2000, as distribuições apresentam comportamentos similares com os focos de incêndio apresentando maiores concentrações nos meses de setembro e outubro.

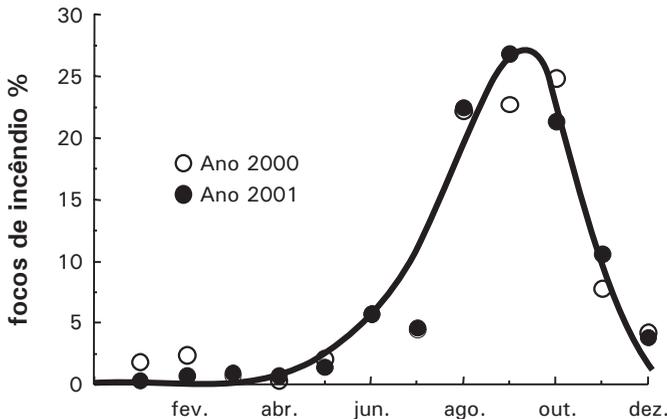


Figura 13. Frequência de ocorrência de focos de incêndio no Brasil e tendências determinadas pela função Hyper.

Referências Bibliográficas

- ABELLANA, M.; BENEDI, J.; SANCHIS, V.; RAMOS, A. J. Water activity and temperature effects on germination and growth of *Eurotium amstelodami*, *E. chevalieri* and *E. herbariorum* isolates from bakery products. **Journal of Applied Microbiology**, Danvers, v. 87, n. 3, p. 371-380, 1999.
- ALMEIDA, J. R.; OLIVEIRA, S. G.; BORGES, I. L.; D'ALMEIDA, J. M. Application of deterministic model of isothermals for population dynamics of *synthesiomyia nudiseta* (diptera, muscidae). **Revista Brasileira de Biologia**, Rio de Janeiro, v. 61, n. 1, p. 141-145, 2001.
- ARANDA-ORDAZ, F. J. On two families of transformations to additivity for binary response data. **Biometrika**, London, v.68, p.357-363, 1981.
- ASSIS, F. N.; ARRUDA, H. V.; PEREIRA, A. R. **Aplicações de estatística à climatologia: teoria e prática**. Pelotas: Universitária, 1996. 161 p.
- BASSANEZI, R. B.; AMORIM, L.; BERGAMIN FILHO, A.; HAU, B. Effects of bean line pattern mosaic virus on the monocyclic components of rust and angular leaf spot of Phaseolus bean at different temperatures. **Plant Pathology**, London, v. 47, n. 3, p. 289-298, 1998.
- BEDMAR, F.; MANETTI, P.; MONTERUBBIANESI, G. Determination of the critical period of weed control in corn using a thermal basis. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 34, n. 2, p. 187-194, 1999.
- BISHOP, S. C.; STEAR, M. J. The use of a gamma-type function to assess the relationship between the number of adult *Teladorsagia circumcincta* and total egg output. **Parasitology**, London, v. 121, n. 4, p. 435-440, 2000.
- CAO, Q. V. A method to distribute mortality in diameter distribution models. **Forest Science**, Washington, v. 43, n. 3, p. 435-442, 1997.
- CARISSE, O.; BOURGEOIS, G.; DUTHIE, J. A. Influence of temperature and leaf wetness duration on infection of strawberry leaves by *Mycosphaerella fragariae*. **Phytopathology**, St. Paul, v. 90, n. 10, p. 1120-1125, 2000.
- DURR, J. W.; MONARDES, H. G.; CUE, R. I. Genetic analysis of herd life in Quebec Holsteins using weibull models. **Journal of Dairy Science**, Champaign, v. 82, n. 11, p. 2503-2513, 1999.

DURRANS, S. R.; TRICHE, M. H.; SUDDARTH, S. K. Estimation of lower tail quantiles of Weibull probability distributions for lumber strength. **Forest Products Journal**, Madison, v. 48, n. 1, p. 96-101, 1998.

EL FARO, L.; ALBUQUERQUE, L. G.; FRIES, L. A. Comparação de alguns modelos matemáticos para ajuste a curva de lactação média de um rebanho da raça caracu. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 28, n. 5, p. 987-992, 1999.

EVANS, M.; HASTINGS, N.; PEACOCK, B. **Statistical distributions**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 2000. 221 p.

EVERETT, R. L.; SCHELLHAS, R.; KEENUM, D.; SPURBECK, D.; OHLSON, P. Fire history in the ponderosa pine/Douglas-fir forests on the east slope of the Washington Cascades. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 129, n.1/3, p. 207-225, 2000.

FARIA, R. A.; SOARES, A. A.; SEDIYAMA, G. C.; RIBEIRO, C. A. S. Demanda de irrigação suplementar para a cultura do milho no Estado de Minas Gerais. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 4, n. 1, p. 46-50, 2000.

FERREIRA, R. L. C.; SOUZA, A. L.; JESUS, R. M. Dinâmica da estrutura de uma floresta secundária de transição. II - distribuição diamétrica. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 22, n. 3, p. 331-344, 1999.

FORCELLA, F.; COLBACH, N.; KEGODE, G.O. Estimating seed production of three *Setaria* species in row crops. **Weed Science**, Ithaca, v.48, n. 4, p. 436-444, 2000.

GARRIZ, P. I.; COLAVITA, G. M.; ALVAREZ, H. L. Characterization of seasonal fruit growth of 'Packham's Triumph' pear. **Revista Ceres**, Viçosa, v. 46, n. 268, p. 597-606, 1999.

GODOY, C. V.; AMORIM, L.; BERGAMIN FILHO, A. Influência da duração do molhamento foliar e da temperatura no desenvolvimento da ferrugem do milho causada por *Puccinia polysora*. **Fitopatologia Brasileira**, Brasília, v. 24, n. 2, p. 160-165, 1999.

GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining life contingencies. **Philosophical Transactions of the Royal Society, London**, v. 115, p. 513-585, 1825.

GOTTSCHALK, L.; WEINGARTNER, R. Distribution of peak flow derived from a distribution of rainfall volume and runoff coefficient, and a unit hydrograph.

Journal of Hydrology, Amsterdam, v.208, n. 3/4, p. 148-162, 1998.

GOTTWALD, T. R.; GARNSEY, S. M.; BORBON, J. Increase and patterns of spread of citrus tristeza virus infections in Costa Rica and the Dominican Republic in the presence of the brown citrus aphid, *Toxoptera citricida*.

Phytopathology, St. Paul, v. 88, n. 7, p. 621-636, 1998.

GRUNDY, A. C.; MEAD, A. Modeling weed emergence as a function of meteorological records. **Weed Science**, Ithaca, v. 48, n. 5, p. 594-603, 2000.

GUMPERTZ, M. L.; TSUNG, W. C.; PYE, J. M.; WU, C. T. Logistic regression for southern pine beetle outbreaks with spatial and temporal autocorrelation.

Forest Science, Washington, v. 46, n. 1, p. 95-107, 2000.

HARA, Y. Application of the Richards function to nitrogen release from coated urea at a constant temperature and relationships among the calculated parameters. **Soil Science and Plant Nutrition**, Tokyo, v. 46, n. 3, p. 683-691, 2000.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous univariate distributions**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1994. 784 p.

KNAP, P. W. Time trends of Gompertz growth parameters in 'meat-type' pigs.

Animal Science, Edinburgh, v. 70, n. 1, p. 39-49, 2000.

KELLY, K. S.; KRZYSZTOFOWICZ, R. Precipitation uncertainty processor for probabilistic river stage forecasting. **Water Resources Research**, Washington, v.36, n. 9, p. 2643-2653, 2000.

KOSUGI, K.; HOPMANS, J. W. Scaling water retention curves for soils with Lognormal pore-size distribution. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 62, n. 6, p. 1496-1505, 1998.

LERIN, J.; KOUBAITI, K. Modeling winter oilseed rape plant infestation by *Barys coerulenscens* (Coleoptera Curculionidae). **Environmental Entomology**, College Park, v. 26, n. 5, p. 1031-1039, 1997.

LI, A. G.; HOU, Y. S.; WALL, G. W.; TRENT, A.; KIMBALL, B. A.; PINTER, P. J. **Free-Air CO₂ Enrichment and Drought Stress Effects on Grain Filling Rate and Duration in Spring Wheat**. **Crop Science**, Madison, v. 40, n. 5, p. 1263-1270, 2000.

LIMA, C. A. G.; SILANS, A. P. Variabilidade espacial da infiltração de água no solo, **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 34, n. 12, p. 2311-2320, 1999.

MACENA, F. A.; ASSAD, E. D.; MATTOS, H.; LUIZ, A. J. B. Variação espaço-temporal da disponibilidade hídrica climática no Estado de Goiás, **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 33, n. 5, p. 605-612, 1998.

MACHADO, S. A.; BARTOSZEK, A. C. P. S.; OLIVEIRA, E. B. Estudo da estrutura diamétrica para *Araucaria angustifolia* em florestas naturais nos estados da região sul do Brasil. **Floresta**, Curitiba, v. 26, n. 1/2, p. 59-70, 1998.

MARIN, S.; SANCHIS, V.; SAENZ, R.; RAMOS, A. J.; VINAS, I.; MAGAN, N. Ecological determinants for germination and growth of some *Aspergillus* and *Penicillium* spp. from maize growth. **Journal of Applied Microbiology**, Danvers, v. 84, n. 1, p. 25-36, 1998.

MATA, M. M.; FIERROS, G. A. M. Prediccion del crecimiento de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* Barr y Golf. en "La Sabana", Oaxaca. **Revista Forestal Centroamericana**, n.32, p. 20-25, 2000.

MAYER, G. H. D. Modeling fire interval data from the American Southwest with the Weibull distribution. **International Journal of Wildland Fire**, v. 9, n. 1, p. 37-50, 1999.

MAZZUCO, H.; GUIDONI, A. L.; JAENISH, F. R. Efeito da restrição alimentar qualitativa sobre o ganho compensatório em frangos de corte. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 35, n. 3, p. 543-549, 2000.

MEDEIROS, H. A.; AQUINO, L. H.; BEARZOTI, E.; FERREIRA, D. F. Avaliação da qualidade do ajuste da função logística monofásica com estrutura de erros independentes e autorregressivos através de simulação. **Ciência eAgrotecnologia**, Lavras, v. 24, n. 4, p. 973-985, 2000.

MELLO, C. R.; FERREIRA, D. F.; SILVA, A. M.; LIMA, J. M. Análise de modelos matemáticos aplicados ao estudo de chuvas intensas. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Campinas, v. 25, n. 3, p. 693-698, 2001.

MILICER, H.; SZCZOTKA, F. Age at Menarche in Warsaw girls in 1965. **Human Biology**, v. 38, p. 199-203, 1966.

NANOS, N.; TADESSE, W.; MONTERO, G.; GIL, L.; ALIA, R. Modelling resin production distributions for *Pinus pinaster* Ait using two probability functions. **Annals of Forest Science**, v. 57, n. 4, p. 369-377, 2000.

NELDER, J. A. The fitting of a generalization of the logistic curve. **Biometrics**, Washington, v.17, p. 89-111, 1961.

NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. M. Generalized linear models. **Journal of the Royal Statistical Society. Série A**, London, v. 135, p. 370-384, 1972.

NUMMELIN, M. Log-normal distribution of species abundances is not a universal indicator of rain forest disturbance. **Journal of Applied Ecology**, Oxford, v. 35, n. 3, p. 454-457, 1998.

OLIVEIRA, A. D.; COSTA, J. M. N.; LEITE, R. A.; SOARES, P. C.; SOARES, A. A. Probabilidade de chuvas e estimativas da época de semeadura para cultivares de arroz de sequeiro, em diferentes regiões do Estado de Minas Gerais, Brasil. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 8, n. 2, p. 295-309, 2000.

OSTERAS, A. H.; EKVALL, L.; GREGER, M. Sensitivity to, and accumulation of, cadmium in *Betula pendula*, *Picea abies*, and *Pinus sylvestris* seedlings from different regions in Sweden. **Canadian Journal of Botany**, Ottawa, v. 78, n. 11, p. 1440-1449, 2000.

POLLET, S.; BLEYAERT, P.; LEMEUR, R. Application of the Penman-Monteith model to calculate the evapotranspiration of head lettuce (*Lactuca sativa* L. var. *capitata*) in glasshouse conditions. **Acta Horticulturae**, The Hague, n. 519, p. 151-161, 2000. Proceedings of the XXV International Horticultural Congress. Part 9. Computers and automation, electronic information in horticulture.

QUINE, C. P. Estimation of mean wind climate and probability of strong winds for wind risk assessment. **Forestry**, v. 73, n. 3, p. 247-258, 2000.

RIBEIRO, A. M.; LUNARDI, D. M. C. A precipitação mensal provável para Londrina - PR, através da função Gama. **Energia na Agricultura**, Botucatu, v.12, n. 4, p. 37-44, 1996.

RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, London, v. 10, p. 290-300, 1959.

SAAD, J. C. C.; FRIZZONE, J. A. Estudo da distribuição de frequência da precipitação pluvial, visando o dimensionamento de sistemas de irrigação. **Irriga**, Botucatu, v. 3, n.1, p. 117-126, 1998.

SAMPAIO, A. C.; CORREA, M. M.; VILLAS-BOAS, M. A.; OLIVEIRA, L. F. C. Estudo da precipitação efetiva para o município de Lavras, MG. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 4, n. 2, p. 210-213, 2000.

SANSIGOLO, C. A.; NERY, J. T. Distribuição de extremos de temperatura mínima no Estado do Paraná. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v.8, n. 2, p. 247-253, 2000.

SANTOS, S. A.; SOUZA, G. da S. e; OLIVEIRA, M. R. de; SERENO, J. R. Uso de modelos não-lineares para o ajuste de curvas de crescimento de cavalos Pantaneiros. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 34, n. 7, p. 1133-1138, 1999.

SANTOS, E.; GUERRINI, I. A; Determinação experimental da dimensão fractal do movimento da água no solo em fluxos horizontais. **Irriga**, Botucatu, v. 3, n. 2, p. 96-107, 1998.

SILVA, D.D; PINTO, F.R.L; PRUSKI, F.F; PINTO, F.A. Estimativa e espacialização dos parâmetros da equação de intensidade-duração-frequência da precipitação para o Rio de Janeiro e o Espírito Santo. **Engenharia Agrícola**, Botucatu, v. 18, n. 3, p. 11-21, 1999.

SOUZA NETO, J.; COX, M.; SOUSA, F. B.; ARRUDA, F. A. V. Modelo de Wood aplicado a curva de lactação de caprinos no Estado do Ceará. In: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ZOOTECNIA, 35., 1998, Botucatu, SP. **Anais...** Botucatu: Sociedade Brasileira de Zootecnia, 1998. p. 494-496.

SUSMEL, P.; SPANGHERO, M.; STEFANON, B. Interpretation of rumen degradability of concentrate feeds with a Gompertz model. **Animal Feed Science and Technology**, Amsterdam, v. 79, n. 3, p. 223-237, 1999.

TATE, E. L; FREEMAN S. N. Three modelling approaches for seasonal streamflow droughts in southern Africa: the use of censored data. **Hydrological Sciences Journal**, Oxford, v. 45, n. 1, p. 27-42, 2000.

TEDESCHI, L. O.; BOIN, C.; NARDON, R. F.; LEME, P. R. Estudo da curva de crescimento de animais da raça Guzerá e seus cruzamentos alimentados a pasto, com e sem suplementação. 1. Análise e seleção das funções não-lineares. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v. 29, n. 2, p. 630-637, 2000.

TEI, F.; AIKMAN, D. P.; SCAIFE, A. Growth of lettuce, onion and red beet. 2. Growth modelling. **Annals of Botany**, London, v. 78, n. 5, p. 645-652, 1996.

TOURENO, C.; AULAGNIER, S.; DURIEUX, L.; LEK, S.; JOHNSON, A.; MARTIN, J.L. Identifying rice fields at risk from damage by the greater flamingo. **Journal of applied Ecology**, Oxford, v. 38, n. 1, p. 170-179, 2001.

VAN DEVENDER, K. W.; COSTELLO, T. A.; SMITH, R. J. Model of rice (*Oryza sativa*) yield reduction as a function of weed interference. **Weed Science**, Ithaca, v. 45, n. 2, p. 218-224, 1997.

VIVALDI, L.J. **Utilização da distribuição gama em dados pluviométricos**. 1973. 73 f. Dissertação (Mestrado em Agrometeorologia)- Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1973.

WEBSTER, T. M.; CARDINA, J. *Apocynum cannabinum* seed germination and vegetative shoot emergence. **Weed Science**, Ithaca, v. 47, n. 5, p. 524-528, 1999.

WEIBULL, W. A statistical distribution function with wide applicability, **Journal of Applied Mechanics**, v. 18, p. 293-297, 1951.

XIONG, R.; XIE, G.; EDMONDSON, A. S.; LINTON, R. H.; SHEARD, M. A. Comparison of the Baranyi model with the modified Gompertz equation for modelling thermal inactivation of *Listeria monocytogenes* Scott. **Food Microbiology**, v. 16, n. 3, p. 269-279, 1999.

YUE, S.; OUARDA, T. B. M. J.; BOBEE, B.; LEGENDRE, P.; BRUNEAU, P. The Gumbel mixed model for flood frequency analysis. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 226, n. 1/2, p. 88-100, 1999.

ZOBECK, T. M.; GILL, T. E.; POPHAM, T.W. A two-parameter Weibull function to describe airborne dust particle size distributions. **Earth Surface Processes and Landforms**, v. 24, n. 10, p. 943-955, 1999.

A Highly Flexible Hyperbolic Probabilistic Distribution Function

Abstract - A probabilistic distribution function, named Hyper function, is proposed with the following configuration: $\omega * \tanh(\beta * (x - \alpha)^\gamma)$, where ω represents the asymptotic value, β determines the expansion rate, α refers to the location parameter and γ defines the distribution inflexion point. The derivative function can be expressed as $f(x) = \omega * \beta * \gamma * (x - \alpha)^{\gamma - 1} * (1 - \tanh(\beta * (x - \alpha)^\gamma)^2)$, performing unimodal distributions with positive and negative symetries. In many cases, results obtained by fitting the Hyper function were superior to those obtained with the Weibull function. Wile the Weibull function has inflexion points ranging from zero to 0.63 ($l = 1 - 1/e$), the Hyper function presents inflexion points ranging from zero to 0.76 ($\tanh(1) = 0.76$).

Index terms: Weibull, statistical distribution, continuous distribution, hyper function .