

03797  
CPAC  
1982

200, 50

FL-03797

# Boletim de Pesquisa

NOVEMBRO, 1982

Número 14

## USO DE CURVA DE POTÊNCIA NA DETERMINAÇÃO DE SÉRIES RELATIVAS CONTÍNUAS DE FORMA PARA ESPÉCIES FLORESTAIS



EMBRAPA

Uso de curva de potência na  
1982 FL-03797

ECUÁRIA DOS CERRADOS



29902-1

**USO DE CURVA DE POTÊNCIA  
NA DETERMINAÇÃO DE SÉRIES RELATIVAS CONTÍNUAS  
DE FORMA PARA ESPÉCIES FLORESTAIS**

*Daniel Pereira Guimarães*



**EMBRAPA**  
**CENTRO DE PESQUISA AGROPECUÁRIA DOS CERRADOS – CPAC**  
Planaltina, DF.

Exemplares deste documento podem ser solicitados ao:  
CPAC  
BR 020 - km 18  
Rodovia Brasília-Fortaleza  
Caixa Postal, 70-0023  
73.300 - Planaltina -- DF

**Editor: Comitê de Publicações**

Edson Lobato — Presidente  
Sérgio Penna — Secretário-Executivo  
Carlos Alberto dos Santos  
Carlos Roberto Spehar  
Euclides Kornelius  
José Roberto R. Peres

Coordenação editorial: Antônio de Pádua Carneiro  
Normalização bibliográfica: Maria Ferreira de Melo  
Datilografia: Orestina G. Silva Cavalcanti e  
Adonias Pereira de Oliveira  
Desenhista: Nilda Maria C. Sette

**Ficha catalográfica**

(Preparada pelo Setor de Informação e Documentação do  
CPAC)

Guimarães, Daniel Pereira

Uso de curva de potência na determinação de séries relativas contínuas de forma para espécies florestais. Planaltina, EMBRAPA-CPAC, 1982.

24 p. (EMBRAPA-CPAC. Boletim de Pesquisa, 14).

1. Florestas-Medição-Modelo parabólico. 2. Florestas-Medição-Modelo polinomial. 3. Eucaliptos-Medição. 4. Araucária-Medição. I. Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Centro de Pesquisa Agropecuária dos Cerrados. Planaltina, DF. II. Título. III. Série.

CDD 634.9285



EMBRAPA, 1982

## *SUMÁRIO*

	Pág.
Resumo . . . . .	5
Abstract . . . . .	7
Introdução . . . . .	9
Considerações sobre Séries Relativas . . . . .	11
Principais tipos de erros envolvidos . . . . .	13
Proposição do novo modelo . . . . .	15
Teste de aplicabilidade do modelo . . . . .	19
Resultados e discussões . . . . .	21
Conclusões . . . . .	23
Referências bibliográficas . . . . .	24

# USO DE CURVA DE POTÊNCIA NA DETERMINAÇÃO DE SÉRIES RELATIVAS CONTÍNUAS DE FORMA PARA ESPÉCIES FLORESTAIS<sup>1</sup>

Daniel Pereira Guimarães<sup>2</sup>

## RESUMO

É apresentado um modelo para a elaboração de Séries Relativas Contínuas de Forma, baseado em curvas de potência:  $d/D_{0,1} = a.(1-h/H)^b$ , onde  $d$  é o diâmetro superior a ser estimado,  $H$  é a altura total de árvore,  $D_{0,1}$  é o diâmetro tomado a 10% da altura e  $h$  é a altura na qual se deseja saber o diâmetro superior. Comparado com os modelos parabólicos de Munro e polinomial de Wutt na avaliação do volume total de *Eucalyptus grandis* e *Araucaria angustifolia*, mostrou-se superior ao primeiro e semelhante ao segundo, quanto à precisão das estimativas.

**Termos para indexação:** *Eucalyptus*, *Araucaria*, Séries Relativas Contínuas de Forma, Modelo Parabólico, Modelo polinomial.

---

<sup>1</sup> Trabalho apresentado no IV Congresso Florestal Brasileiro, em Belo Horizonte, de 10 a 15 de maio de 1982.

<sup>2</sup> Pesquisador da EMBRAPA-CPAC. Caixa Postal 70-0023, 73.300 - Planaltina, DF.

# USE OF THE POWER CURVE IN DETERMINATION OF TAPER FUNCTIONS FOR FORESTRY SPECIES.

## ABSTRACT

The following mathematical model for taper function studies, where the stem form is fitted by a power curve, is presented:  $d/D_{0.1} = a.(1-h/H)^b$  where  $d$  is upper diameter to be estimated,  $H$  is the total tree height,  $D_{0.1}$  is the Hohenadl and  $h$  is the height in which the diameter prediction is desired. Comparing this model with the known Munro's parabolic and Wutt's polynomial models for the estimation of total volume in *Eucalyptus grandis* and *Araucaria angustifolia*, the results showed it to be superior to the first and comparable with the second model in accuracy.

**Index terms:** *Eucalyptus*, Parana Pine, Taper Function, Parabolic Model, Polynomial Model.

## *INTRODUÇÃO*

O procedimento mais comum para a estimativa do volume de um povoamento florestal tem sido através do uso de tabelas de volume, ou seja, através do relacionamento do volume com variáveis independentes, como diâmetro, altura e, às vezes, uma medida de forma. Entretanto, a crescente importância da madeira, tanto econômica como na diversidade de uso, tem requerido informações mais detalhadas sobre os parâmetros de produtividade. Dentre estes parâmetros, os mais importantes são os referentes à estimativa do volume mercantil, isto é, o volume contido entre diâmetros e alturas limites. Neste caso, os modelos apropriados para a elaboração de tabelas de volume tornam-se ineficientes para as estimativas de volume parciais no tronco.

## CONSIDERAÇÕES SOBRE SÉRIES RELATIVAS

A determinação de volumes mercantis implica necessariamente na utilização de modelos que possibilitem explicar as variações da forma ao longo da extensão do tronco.

As primeiras tentativas de explicar estas variações foram feitas por Hojer em 1903 (citado por Behre, 1923), sendo que o uso de modelos simplificados, determinados na época, não permitiam descrever satisfatoriamente as variações de forma na base e ponta das árvores. Resultados semelhantes são encontrados quando se utiliza o processo proposto por Gray (1966), uma vez que neste caso são assumidas variações constantes do diâmetro em função da altura.

Outra fonte de erro incluída nos primeiros modelos estabelecidos era devida à tentativa de explicar diâmetros superiores, tendo como base o diâmetro à altura do peito (DAP), uma vez que sua posição relativa no tronco é função da altura da árvore (Bruce, 1968). A utilização dos parâmetros obtidos pelo método de cubagem idealizado por Hohenadl tem resultado em informações mais precisas. Entretanto, como o DAP é a medida de maior precisão e de melhor facilidade de mensuração, o ideal seria a elaboração de modelos que corrigissem este tipo de erro.

Atualmente, com a facilidade de uso de computadores eletrônicos, modelos complexos podem ser mais facilmente elaborados e resolvidos, permitindo assim uma maior explicação destas variações.

A maioria dos modelos estabelecidos para estudos de séries relativas contínuas de forma é baseada na utilização de regressões polinomiais. O estabelecimento destas regressões é normalmente feito entre a razão dos diâmetros superiores do tronco ( $d$ ) com algum diâmetro de fácil mensuração, como o DAP, o diâmetro de Hohenadl ( $D_{0,1}$ ), ou algum diâmetro em posição preestabelecida e determinadas alturas relativas ao tamanho da árvore, com a razão entre a altura relativa e a altura total ( $h/H$ ), a altura total ( $H$ ), a diferença entre elas ( $H-h$ ) e outras.

Neste caso, são estabelecidos modelos para explicar diâmetros. Alguns, por meio de procedimentos semelhantes, são elaborados para explicar volumes superiores.

Dentre os principais polinômios utilizados, destacam-se o polinômio do segundo grau (Munro, 1968), do terceiro grau (Osumi, 1959), do quinto grau (Wutt, 1961, citado por Pellico Neto, 1980) e polinômio do sexto grau (Cao, 1980). Parece que a precisão dos modelos é proporcional a sua complexidade, uma vez que o aumento no grau do polinômio contribui mais para explicar as variações de forma encontradas na base e ponta das árvores.

Além do uso de polinômios, outra técnica que tem recebido especial atenção na tentativa de explicar as variações de forma é a de análise multivariada, como análise do componente principal (Ahrens, 1980).

Assim, são atualmente conhecidos vários processos para a elaboração de séries relativas contínuas de forma, havendo a necessidade de se determinar, para cada tipo de povoamento, o modelo que melhor se adapte aos dados.

Neste trabalho, o autor propõe um novo modelo de função, visando contribuir para a elaboração de séries relativas contínuas de forma.

### *PRINCIPAIS TIPOS DE ERROS ENVOLVIDOS*

Se uma série relativa contínua de forma é elaborada em função de apenas um diâmetro e alturas relativas, então dois tipos de erro são identificados. Como neste caso, o máximo de precisão a ser obtido será a explicação da média das formas verdadeiras (média das formas de Hohenadl), então, existe um erro de estimativa determinado pelas variações da forma em torno da média. Este erro poderá ser diminuído com a inclusão de novas medidas de diâmetro, o que, por outro lado, afetará sensivelmente a aplicação prática do modelo resultante. Outra maneira de tentar minimizar o erro seria através de uma prévia análise dos dados, procurando-se agrupá-los de acordo com a forma, desde que se observe correlação entre estes grupos com características de fácil identificação no campo (medidas de dimensão, posição da árvore no povoamento, etc.).

O outro tipo de erro possível e que deve merecer especial atenção é o determinado pela incapacidade do modelo selecionado de se ajustar às variações da forma ao longo da extensão do tronco, gerando assim erros de tendência (bias) que causariam estimativas inexatas das quantidades a serem obtidas.

No caso de povoamentos constituídos por árvores de formas muito variáveis, os modelos poderão apresentar provas de precisão muito semelhantes, porque o primeiro tipo de erro detectado deverá ser o responsável pela maior parte das variações. Daí a necessidade de uma criteriosa seleção dos modelos para evitar erros de tendência.

Considerando-se que uma série relativa contínua de forma representaria a média das formas de Hohenadl, procurou-se determiná-la e representá-la graficamente antes de se proceder o ajuste de qualquer modelo. Como a forma é altamente dependente da espécie, procurou-se utilizar duas espécies de formas conhecidamente distintas, evitando assim a elaboração de um modelo que poderia apenas ser eficiente para os dados e espécies analisados.

Foram utilizadas 20 árvores de *Eucalyptus grandis*, provenientes de plantios da Florestal Acesita, em Pedra Corrida - MG, e 60 árvores de *Araucaria angustifolia*, provenientes de Irati - PR. A distribuição dos diâmetros variou entre 9,71 e 27,37 cm, para o eucalipto, e entre 11,7 e 31,7 cm, para a araucária. A cubagem do eucalipto foi feita de metro em metro, usando o processo de Smalian, e a de araucária, pelo processo de Hohenadl conforme descrito por Heger, 1965. Uma vez obtidas as formas médias, efetuou-se a plotagem gráfica para posterior análise.

As variações de forma, ao longo do tronco, são mostradas na Figura 1 para *Eucalyptus grandis* e na Figura 2 para *Araucaria angustifolia*.

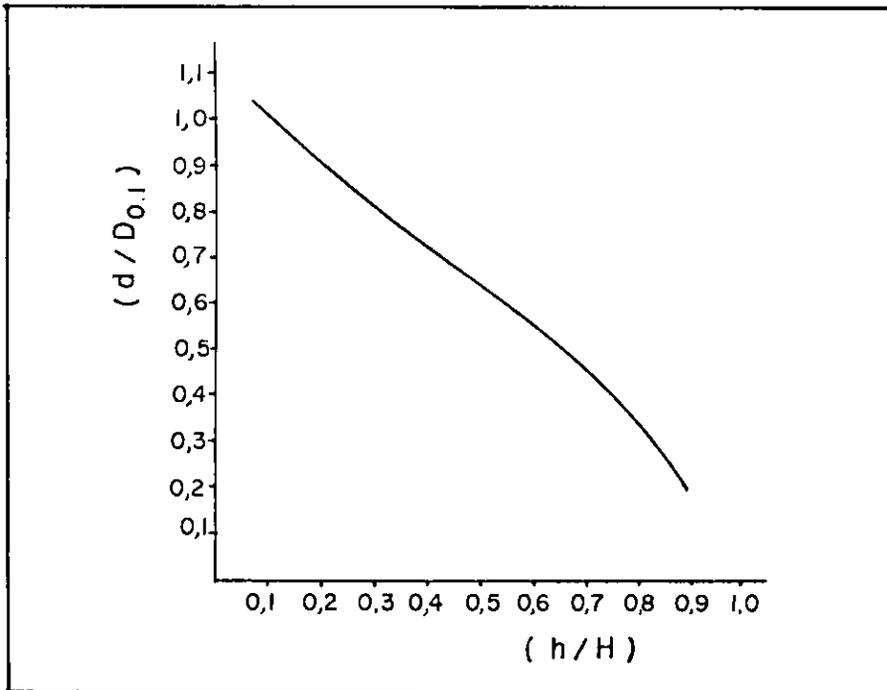


FIG. 1. Variações médias da forma de *E. grandis*.

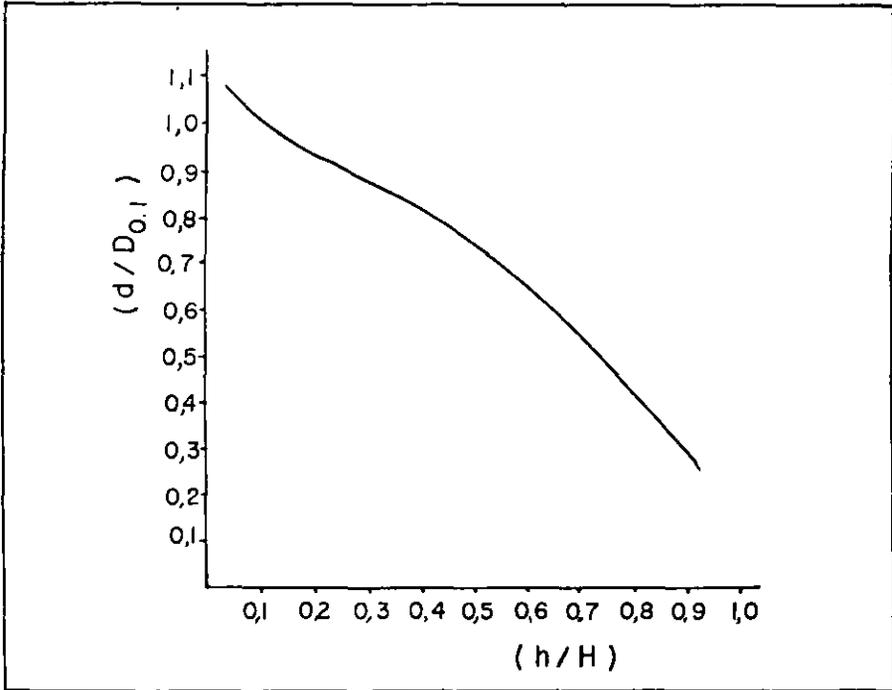


FIG. 2. Variações médias da forma de *A. angustifolia*.

A análise do tipo de curva descrita pelas variações de forma, em função das alturas relativas, evidencia a dificuldade de se proceder o ajuste de um modelo a estas variações. Ficam também evidentes as diferenças de forma entre as duas espécies. Procurou-se então efetuar transformações nos dados, de forma a permitir determinar um modelo que se aplicaria a estas variações.

Verificou-se que, se dividirmos os parâmetros da ordenada pelos valores da abscissa, isto é, dividirmos  $Y/X$ , a linha que explica as variações de forma se transforma numa hipérbole. Estas transformações são mostradas na Figura 3, para eucalipto, e na Figura 4 para araucária. Como a utilização de um modelo baseado em hipérbole conduziria a modelo de curvatura muito rígida, o mais adequado para o presente estudo seria a utilização de modelos de curva de potência ( $Y = a \cdot x^b$ ). Este modelo só será aplicável se usarmos o inverso da altura relativa, o que nos forneceria o seguinte modelo matemático:

$$d/D_{0.1} = a \cdot (1-h/H)^b,$$

onde  $d$  é o diâmetro superior a ser estimado,  $D_{0.1}$  é o diâmetro de Hohenadl,  $h$  é a altura em que se deseja medir o diâmetro superior e  $H$  é a altura total.

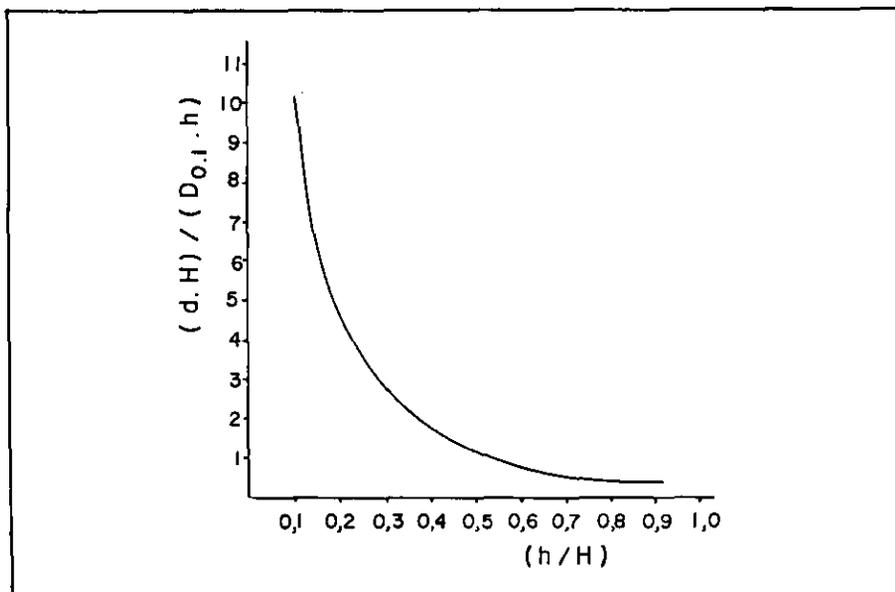


FIG. 3. Transformação dos dados em curva de potência (eucalipto).

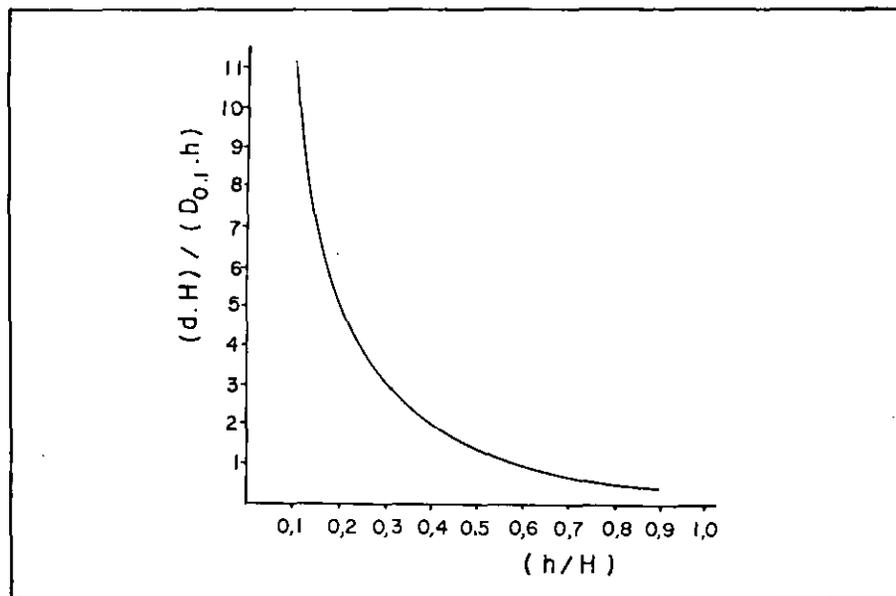


FIG. 4. Transformação dos dados em curva de potência (araucária).

## TESTE DE APLICABILIDADE DO MODELO

A viabilidade de aplicação prática de um modelo é influenciada por dois fatores, sendo o principal a capacidade de estimativa dos dados (precisão), e sua facilidade de aplicação prática.

Como existem diversos modelos para a elaboração de séries relativas contínuas de forma, optou-se pela utilização de dois modelos, já tradicionalmente conhecidos, para o estabelecimento de provas de precisão. Os modelos selecionados foram:

a) Modelo parabólico de Munro

$$Y = a + b.x + c.X^2$$

b) Modelo polinomial de Wutt

$$Y = a + b.X + c.X^2 + d.X^3 + e.X^4 + f.X^5$$

onde Y é a razão entre o diâmetro a ser estimado e o diâmetro a ser medido, e X é a razão entre a altura relativa e a altura total.

Espera-se que esses modelos, determinados com base no DAP, tenham suas precisões diminuídas sensivelmente, em função do erro causado pela posição deste em relação à altura total. Uma forma de diminuí-lo seria, talvez, o estabelecimento de uma correlação entre DAP e  $D_{0,1}$  e sua inclusão no modelo natural (baseado em  $D_{0,1}$ ), ao invés de determinar um modelo artificial (baseado no DAP).

Para a seleção do modelo mais eficiente efetuou-se as comparações através da soma dos quadrados dos resíduos (SQR); e para verificar a possibilidade de erros de tendência, foram feitas comparações entre os modelos em relação à capacidade de explicar as variações da forma média, ao longo da extensão do tronco.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como os modelos estimariam os valores médios da forma de Hohenadl, o modelo proposto foi resolvido em função do correlacionamento das percentagens da altura com os valores médios da razão entre  $d/D_{0,1}$ , obtendo-se os seguintes coeficientes de regressão:

a) *Eucalyptus grandis*:  $R^2 = 0,99783$ ,  $a = 1,06820$ ,  $b = 0,71967$ .

b) *Araucaria angustifolia*:  $R^2 = 0,99884$ ,  $a = 1,10021$ ,  $b = 0,61368$ ,

onde  $R^2$  é o coeficiente determinístico, a e b são os parâmetros que resolvem as funções de potência.

Os modelos parabólico e polinomial tiveram seus coeficientes resolvidos através de computador (PROC GLM, Statistical Analysis System, SAS/1979 ed.).

Os coeficientes determinados para os modelos foram:

a) Modelo Parabólico

*Eucalyptus grandis*

a = 1,04526

b = -0,63169

c = -0,32127

b) Modelo Polinomial

a = 1,17496

b = -2,27649

c = 6,48421

d = 13,28100

e = 12,99461

f = -5,12473

*Araucaria angustifolia*

a = 1,09166

b = -0,56156

c = -0,38464

a = 1,15586

b = -2,01163

c = 7,22257

d = -16,46696

e = 16,45082

f = -6,30499

Os valores médios de redução do diâmetro em função de  $D_{0,1}$  e os respectivos valores estimados pelos três modelos a serem comparados são mostrados na Tabela 1, para *Eucalyptus grandis*, e na Tabela 2, para *Araucaria angustifolia*.

**TABELA 1. Parâmetros de redução média dos diâmetros, em função de  $D_{0,1}$  e da percentagem da altura para *E. grandis*.**

h/H	M.V.R.	M.P.M.	M.P.W.	N.M.P.
0,1	1,00000	0,97888	1,00012	0,99020
0,2	0,89248	0,90607	0,89119	0,90972
0,3	0,80906	0,82684	0,80981	0,82637
0,4	0,73206	0,74118	0,73204	0,73960
0,5	0,65051	0,64909	0,64966	0,64865
0,6	0,55968	0,55058	0,56029	0,55242
0,7	0,46187	0,44565	0,46199	0,44911
0,8	0,34737	0,33429	0,34711	0,33545
0,9	0,19607	0,21650	0,19614	0,20370

TABELA 2. Parâmetros de redução média dos diâmetros, em função de  $D_{0,1}$  e da percentagem da altura para *A. angustifolia*.

h/H	M.V.R.	M.P.M.	M.P.W.	N.M.P.
0,33	1,09743	1,07271	1,09677	1,07778
0,167	0,95663	0,98715	0,95663	0,98350
0,3	0,87572	0,88857	0,87572	0,88392
0,5	0,73215	0,71472	0,72846	0,71902
0,7	0,52877	0,51009	0,52876	0,42553
0,9	0,26638	0,27470	0,26161	0,26779

M.V.R. = média dos valores reais; M.P.M. = média dos valores estimados pelo modelo parabólico de Munro; M.P.W. = média dos valores estimados pelo modelo polinomial de Wutt; e N.M.P. = média dos valores estimados pelo modelo proposto.

Uma comparação entre os parâmetros reais e os estimados pelos modelos para as duas espécies testadas evidencia a excelente capacidade de ajuste do modelo polinomial às variações médias da forma, ao longo da extensão do tronco. O novo modelo proposto apresentou resultados inferiores ao modelo polinomial e superiores ao modelo parabólico, na estimativa da forma média de Hohenadl.

A aplicação dos modelos na estimativa dos volumes totais das duas espécies, comparando-os através da soma do quadrado dos resíduos (S.Q.R.) entre os valores estimados e os valores reais, é mostrada na Tabela 3.

TABELA 3. Comparação dos modelos, em função da capacidade de estimativa do volume total com casca.

Espécie	V. total (m <sup>3</sup> )	Parabólico (SQR)	Polinomial (SQR)	Potencial (SQR)
<i>E. grandis</i>	7,80976	0,00754	0,00747	0,00741
<i>A. angustifolia</i>	15,65718	0,08317	0,08238	0,08219

Para as espécies testadas, o modelo proposto mostrou-se como o de melhor estimativa dos volumes, sendo, inclusive, superior ao modelo polinomial. Tanto para *Eucalyptus* quanto para *Araucaria*, o modelo parabólico apresentou resultados que subestimavam os valores reais dos volumes.

Conforme anteriormente afirmado, o ideal seria a utilização de modelos baseados no diâmetro à altura do peito (Séries artificiais), devido à facilidade de obtenção dos dados de campo. Tomando como exemplo o modelo polinomial de Wutt, se optássemos pelo modelo artificial para a elaboração da série relativa contínua de forma para *Eucalyptus grandis*, teríamos os seguintes coeficientes de resolução do modelo:

$$\begin{array}{ll}
 a = 1,10978 & d = 12,48848 \\
 b = 2,14492 & e = 12,22539 \\
 c = 5,09777 & f = -4,82651
 \end{array}$$

A utilização de Curvas de Potência na determinação de Séries Relativas Contínuas de Forma mostrou-se comparável ao uso de polinômio do quinto grau e superior ao modelo parabólico, na estimativa de volumes totais com casca de *Eucalyptus grandis* e *Araucaria angustifolia*. Sua indicação de uso é ainda favorecida pela facilidade de aplicação prática.

Os resultados obtidos mostraram que todos os modelos testados conseguem explicar muito bem as variações médias da forma ao longo da extensão do tronco, sendo a maior parte dos erros encontrados devida a variação da forma em torno da média.

As variações da forma em torno da média são maiores em araucária do que em eucalipto, isto é, a araucária apresenta formas mais irregulares que o eucalipto.

O estabelecimento de correlação entre DAP e  $D_{0,1}$  e sua inclusão no modelo natural é preferível à utilização de modelos artificiais de séries relativas contínuas de forma, baseadas no mesmo modelo que soluciona a série artificial.

A facilidade de construção de uma série relativa, baseada no modelo proposto (determinado através de médias), permite a utilização de várias séries relativas artificiais em função de classes de diâmetro ou altura, o que viabiliza a utilização de séries relativas artificiais em trabalhos de inventário florestal.

Logicamente que o uso do modelo acima produziria resultados inferiores aos obtidos pelo uso do modelo natural ( $D_{0,1}$ ), em função do erro provocado pela posição do DAP em relação à altura total.

Se ao invés de utilizar-se o modelo artificial, fosse tomado o modelo natural e substituído o diâmetro de Hohenadl ( $D_{0,1}$ ) por uma equação de correlacionamento entre DAP e  $D_{0,1}$ , conforme anteriormente mencionado, teríamos:

$$D_{0,1} = 0,01099 + 0,88237.DAP \qquad R^2 = 0,99388$$

A inclusão desta função no modelo natural mostrou-se vantajosa em relação ao modelo artificial, conseguindo explicar a metade dos erros provocados pelo uso do modelo artificial.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHRENS, S. A Mathematical expression of stem form and volume for Loblolly Pine in Southern Brazil. Oklahoma, Oklahoma State University, 1980. 60 p. Tese Mestrado.
- BEHRE, C. E. Preliminary notes on studies of tree form. *Journal of Forestry* 21: 506-11, 1923.
- BRUCE, D.; CURTIS, R. O. & VANCOEVERING, C. Development of a system of taper and volume tables for red alder. *For. Sci.* 14(3):339-50, 1968.
- CAO, Q. V.; BURKHART, H. E. & MAX, T. A. Evaluation of two methods of cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26(1): 71-80, 1980.
- GRAY, H. R. Principles of forest tree and crop volume growth. Camberra, CAB, 1966. 54 p. (CAB. Bulletin, 42).
- HEGER, L. A trial of Hohenadl's method of stem form and stem volume estimation. *For. Chron.* 41(4): 466-75, 1965.
- MUNRO, D. D. Methods for describing distribution of soundwood in mature western hemlock tress. Columbia, University British Columbia, 1968. 188 p. Tese Doutorado.
- OSUMI, S. Studies on the stem form of forest tress. *Jap. For. Soc.*, 41(12): 471-9, 1959.
- PELLICO NETO, S. Estimativas volumétricas de árvores individuais; síntese teórica. *Revista Floresta*, 11(2): 63-73, 1980.