

Modelo Matemático para Avaliação de Desempenho de Sistemas de Irrigação





Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
Embrapa Cerrados
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento

ISSN 1517-5111

Dezembro, 2002

Documentos 64

Modelo Matemático para Avaliação de Desempenho de Sistemas de Irrigação

Euzebio Medrado da Silva
Juscelino Antonio de Azevedo
Jorge Enoch Furquim Werneck Lima

Planaltina, DF
2002

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

Embrapa Cerrados

BR 020, Km 18, Rod. Brasília/Fortaleza

Caixa Postal 08223

CEP 73310-970 Planaltina - DF

Fone: (61) 388-9898

Fax: (61) 388-9879

<http://www.cpac.embrapa.br>

sac@cpac.embrapa.br

Supervisão editorial: *Nilda Maria da Cunha Sette*

Revisão de texto: *Maria Helena Gonçalves Teixeira*

Jaime Arbués Carneiro

Normalização bibliográfica: *Shirley da Luz Soares*

Capa: *Chaile Cherne Soares Evangelista*

Editoração eletrônica: *Wellington Cavalcanti*

Impressão e acabamento: *Divino Batista de Souza*

Impresso no Serviço Gráfico da Embrapa Cerrados

1ª edição

1ª impressão (2002): tiragem 100 exemplares

Todos os direitos reservados.

A reprodução não-autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei nº 9.610).

CIP-Brasil. Catalogação-na-publicação.

Embrapa Cerrados.

S586m Silva, Euzebio Medrado da.

Modelo matemático para avaliação de desempenho de sistemas de irrigação / Euzebio Medrado da Silva, Juscelino Antonio de Azevedo, Jorge Enoch Furquim Werneck Lima. – Planaltina, DF : Embrapa Cerrados, 2002.

56 p.— (Documentos / Embrapa Cerrados, ISSN 1517-5111; 64)

1. Irrigação - Modelo matemático. 2. Avaliação de desempenho. I. Azevedo, Juscelino Antonio de. II. Lima, Jorge Enoch Furquim Werneck. III. Título. IV. Série.

631.587 - CDD 21

© Embrapa 2002

Autores

Euzebio Medrado da Silva

Eng. Agrônomo, Ph.D., engenharia de irrigação,
Embrapa Cerrados
euzebio@cpac.embrapa.br

Juscelino Antonio de Azevedo

Eng. Agrônomo, Ph.D., solos e nutrição de plantas,
Embrapa Cerrados
juscelin@cpac.embrapa.br

Jorge Enoch Furquim Werneck Lima

Eng. Agrônomo, M.Sc., hidrologia,
Embrapa Cerrados
jorge@cpac.embrapa.br

Apresentação

O dimensionamento otimizado de sistemas de irrigação e seu manejo passam, necessariamente, por decisões que dependem não só de conhecimento sobre as relações entre a uniformidade de distribuição da água e sua conseqüente eficiência de aplicação, mas também dos critérios operacionais adotados no manejo da irrigação. Essas relações que formam o conjunto de medidas essenciais para avaliação do sistema de irrigação precisam ser bem definidas em cada área irrigada e transformadas em indicadores de fácil utilização pelo produtor irrigante.

Este trabalho, aparentemente complexo, oferece excelente alternativa de modelagem da distribuição da água aplicada pela irrigação, apresentada de forma elucidativa para ser utilizada por técnicos e estudantes interessados na avaliação de desempenho de sistemas de cultivos irrigados.

A grande vantagem desse novo modelo matemático reside no seu potencial de ajuste aos mais variados casos de distribuição de água de irrigação, normalmente encontrados. Sua aplicação é detalhada e exemplificada de modo a prover o leitor de um entendimento completo sobre sua utilização no levantamento dos principais parâmetros necessários para avaliação de desempenho de sistemas irrigados e suas conseqüências sobre o manejo de água adotado.

Carlos Magno Campos da Rocha
Chefe-Geral da Embrapa Cerrados

Sumário

| | |
|---|----|
| Introdução | 9 |
| Modelagem da Distribuição da Água Aplicada | 11 |
| Definição do Modelo Proposto | 13 |
| Ajuste dos Parâmetros do Modelo | 14 |
| Função de Distribuição de Probabilidade da Água Aplicada | 19 |
| Distribuição Cumulativa de Probabilidade | 19 |
| Densidade de Probabilidade da Distribuição | 20 |
| Média da Função Densidade de Probabilidade da Distribuição | 23 |
| Variância da Função Densidade de Probabilidade da Distribuição | 26 |
| Aplicação do Modelo Proposto na Análise de Desempenho da Irrigação .. | 28 |
| Coeficiente de Uniformidade de Christiansen (CUC) | 28 |
| <i>Lâmina média aplicada</i> | 28 |
| <i>Média dos desvios absolutos</i> | 30 |
| <i>Exemplo de cálculo do CUC</i> | 35 |
| Coeficiente de Uniformidade de Distribuição (CUD) | 35 |

| | |
|--|----|
| <i>Lâmina média do quartil inferior</i> | 36 |
| <i>Exemplo de cálculo do CUD</i> | 38 |
| Eficiência de Aplicação de Água da Irrigação | 39 |
| <i>Volume total aplicado</i> | 39 |
| <i>Volume Excedente</i> | 40 |
| <i>Volume deficiente</i> | 43 |
| <i>Volume útil</i> | 45 |
| <i>Exemplo de cálculo da E_A</i> | 45 |
| Adequação da Irrigação | 45 |
| <i>Ajuste da área adequadamente irrigada</i> | 46 |
| <i>Fator de adequação da irrigação</i> | 48 |
| <i>Indicadores de desempenho da irrigação ajustada</i> | 49 |
| Considerações Finais | 53 |
| Referências Bibliográficas | 54 |
| Abstract | 56 |

Modelo Matemático para Avaliação de Desempenho de Sistemas de Irrigação

Euzebio Medrado da Silva

Juscelino Antonio de Azevedo

Jorge Enoch Furquim Werneck Lima

Introdução

O desempenho de qualquer método de irrigação pode ser medido, utilizando parâmetros de uniformidade e de eficiência da água aplicada pelo sistema de irrigação. Segundo [Hart et al. \(1979\)](#), ao se desconsiderar as perdas por escoamento superficial na área irrigada e as perdas por condução no trajeto entre o ponto de captação e a área de cultivo, é possível, então, no que se refere à parcela irrigada, estabelecer o nível de desempenho da irrigação, usando apenas dois índices de eficiência e um de uniformidade. O índice de uniformidade indica o desempenho da irrigação na tarefa de distribuição da água na área cultivada. Os dois índices de eficiência indicam o grau de desempenho da irrigação em relação ao cumprimento das metas de manejo previamente estabelecidas no que diz respeito ao percentual da área a ser adequadamente irrigada e a eficiência de aplicação desejada.

É importante destacar que nos sistemas de irrigação pressurizados, a distribuição da água é basicamente controlada pelos emissores e, portanto, o resultado depende, primordialmente, das relações hidráulicas adotadas no dimensionamento da rede de tubulações. Nos sistemas de irrigação por aspersão,

o vento é, também, fator determinante da distribuição de água na área irrigada. Nos sistemas de irrigação por superfície o solo com suas características de infiltração determina o padrão de distribuição da água no perfil do solo. Independentemente do caso, as variações impostas ao perfil de distribuição da água de irrigação podem ser levantadas e utilizadas para averiguar o padrão de uniformidade do sistema e determinar sua eficiência de aplicação.

É sabido que os indicadores de desempenho da irrigação podem ser obtidos diretamente dos dados coletados, entretanto, a análise é mais robusta e completa quando são utilizados modelos ajustados aos valores pontuais observados. Nesse sentido, vários modelos de distribuição estatística (uniforme, normal, lognormal, potencial, beta e gama) têm sido propostos para representar a distribuição da água aplicada por vários tipos de sistemas de irrigação. [Hart & Reynolds \(1965\)](#) empregaram a distribuição normal na avaliação de desempenho da irrigação por aspersão, enquanto que [Karmeli \(1978\)](#) desenvolveu um modelo potencial para representar a distribuição da água infiltrada na irrigação por superfície. O modelo de distribuição estatística Beta foi reconhecido por [Elliot et al. \(1980\)](#) como sendo bastante flexível para representar uma grande variedade de perfis de distribuição de água da irrigação por aspersão; já [Chaudry \(1978\)](#) utilizou a função Gama para representar uma variedade de perfis assimétricos de distribuição de água em sistemas de irrigação. Na irrigação por sulcos, [Silva & Hart \(1992\)](#) propuseram um modelo potencial alternativo ao de [Karmeli \(1978\)](#) para ser aplicado aos casos em que parte da área entre sulcos permanece, efetivamente, sem receber água da irrigação.

Este documento tem por objetivos: (a) apresentar um novo modelo matemático para representar a distribuição da água aplicada por sistemas de irrigação; (b) propor um fator de adequação da irrigação para o ajuste da lâmina líquida de água do cultivo, considerando uma meta, previamente estabelecida, de área a ser adequadamente irrigada.

Modelagem da Distribuição da Água Aplicada

Na avaliação de qualquer sistema de irrigação, cada lâmina de água ou vazão medida é tomada como sendo representativa de uma fração da área irrigada e o conjunto de medidas levantadas representa a área total avaliada. Por melhor que seja o sistema de irrigação, seu padrão de distribuição de água na área irrigada jamais será plenamente uniforme. Essa variabilidade pode ser representada na forma de um perfil de distribuição de água, em relação a cada fração de área amostrada. Para fins de modelagem dessa distribuição, é necessário ordenar, normalmente de forma decrescente, os valores medidos e associá-los às suas respectivas frações de área acumulada, ignorando sua localização original.

Por exemplo, no caso da avaliação de um sistema de irrigação localizada, a metodologia preconizada por [Merriam & Keller \(1978\)](#) considera como representativo de uma unidade de irrigação o conjunto de observações formado pela coleta de água em apenas 16 pontos da área avaliada. Neste caso, cada valor coletado representará 1/16 avos da unidade de irrigação avaliada. O conjunto de dados obtidos pode ser organizado, associando o maior valor observado à fração de área correspondente à 1/16 avos, o segundo maior valor à 2/16 avos e, assim, sucessivamente, até associar o último valor com a unidade. Neste exemplo, as observações serão igualmente espaçadas ao longo do perfil de distribuição por representarem frações de áreas iguais.

Essa igualdade nas frações de área representativas das lâminas ou vazões coletadas é alternativa mais comumente encontrada. Entretanto, no caso do perfil de distribuição de água, decorrente da avaliação do pivô-central, o processo de coleta de água ([Hahn & Rosentreter, 1989](#)) é feito com coletores dispostos radialmente e espaçados uniformemente, a partir do ponto pivô, determina, assim, frações de áreas desiguais, representativas de cada valor coletado. Esse é o caso ilustrado na [Figura 1](#), onde depois do ordenamento decrescente das observações, a localização dos pontos observados ao longo do perfil de distribuição de água fica irregular.

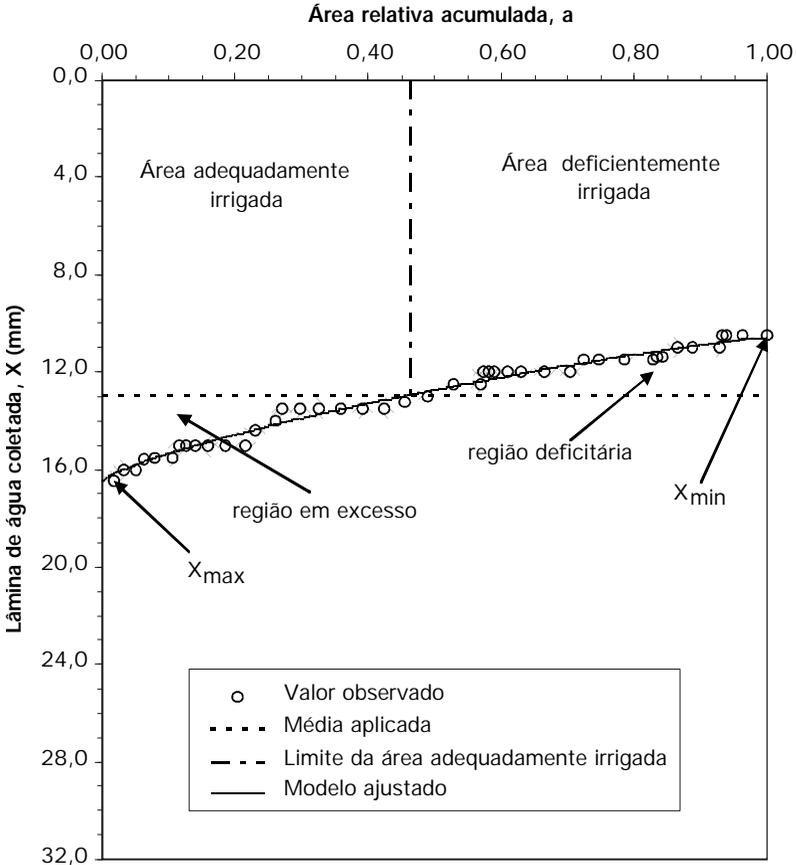


Figura 1. Lâminas de água aplicada, por um pivô-central, e ordenada de forma decrescente, em função da fração acumulada de área irrigada, considerando suas devidas ponderações.

É importante destacar que, na implementação dessa modelagem, a lâmina média aplicada (Figura 1) deve ser considerada como sendo igual ao requerimento de água da cultura, ou seja, igual à lâmina líquida de irrigação. Em qualquer evento de aplicação de água, esse valor deve ser visto como a meta de irrigação a ser alcançada. No caso do pivô-central, ele é obtido regulando a velocidade de deslocamento do equipamento e, no caso de sistemas de irrigação estacionários, a exemplo da irrigação localizada, essa meta é alcançada estabelecendo-se o tempo de aplicação necessário para aplicar a lâmina de água ou vazão desejada.

Nessa análise, considera-se, ainda, que o perfil de distribuição de água é característico do sistema de irrigação e invariante no tempo e, portanto, independente da magnitude da lâmina aplicada, conforme relataram [Folegatti et al. \(1998\)](#).

Observando o traçado do perfil de distribuição apresentado, verifica-se que ele determina, em relação à média de água aplicada, uma área em excesso e outra em deficiência. A porção do perfil, contido na região em excesso, deve ser interpretado como uma irrigação que satisfaz a meta estabelecida (média aplicada), definindo, portanto, a área adequadamente irrigada, enquanto, o restante do perfil, determina a região com irrigação deficiente.

Definição do Modelo Proposto

O modelo matemático proposto para o ajuste das lâminas de água ordenadas de forma decrescente tem a seguinte formulação:

$$\hat{X} = X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1 - a^n)^m \quad (1)$$

onde a : área relativa acumulada (adimensional); \hat{X} : lâmina de água ou vazão aplicada em função da área relativa acumulada; X_{\min} e X_{\max} : parâmetros ajustados correspondentes, respectivamente, à lâmina ou às vazões mínima e máxima da água aplicada; m e n : parâmetros adimensionais de ajuste. A linha cheia, ajustada aos pontos observados da [Figura 1](#), ilustra um exemplo de aplicação do modelo proposto.

Para facilitar o processo de dedução das fórmulas necessárias ao cálculo dos indicadores de desempenho da irrigação, a variável \hat{X} do modelo proposto (Equação 1) será reduzida a uma forma adimensional, utilizando a seguinte definição:

$$x = \frac{\hat{X} - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} \quad (2)$$

onde x : lâmina ou vazão reduzida, variando no intervalo de 0 a 1.

Utilizando essa definição (Equação 2), o modelo proposto (Equação 1) fica reduzido à seguinte expressão:

$$x = (1 - a^n)^m \quad (3)$$

Ajuste dos Parâmetros do Modelo

Uma vez ordenado os valores de lâmina ou vazão de água aplicada do sistema de irrigação, em função dos seus respectivos valores de fração de área acumulada, o modelo proposto deve ser, então, ajustado aos dados observados para obtenção dos parâmetros representativos. Como o modelo proposto (Equação 1) é não linear, o procedimento de ajuste para determinação seus parâmetros (X_{\min} , X_{\max} , m e n) é iterativo, ou seja, partindo-se de uma estimativa inicial, o processo de cálculo deverá, em cada iteração, melhorar essas estimativas, até encontrar um conjunto de parâmetros que resultem na menor soma de quadrados entre os valores observados e calculados pelo modelo. Isso significa que o procedimento adotado deve minimizar a seguinte função-objetivo:

$$SQ = \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X}_i)^2 \quad (4)$$

onde: SQ: soma de quadrados de erros entre os valores observados e calculados; j : número de ordem das lâminas de água ou das vazões observadas; N: número total de dados observados; X_i : lâmina de água ou vazão observada para cada fração de área acumulada; \hat{X}_i : lâmina de água ou vazão calculada para cada fração de área acumulada.

Existem vários algoritmos programados em pacotes estatísticos (SAS, 1990) e planilhas eletrônicas ([Microsoft Corporation, 1994](#)), que podem ser utilizados para determinação dos parâmetros de ajuste de modelos não-lineares. Caso haja interesse na programação direta de um desses procedimentos, recomenda-se a utilização do algoritmo proposto por [Marquadt \(1963\)](#), o qual se encontra programado em [Press et al. \(1990\)](#). Nessa abordagem, será utilizada a rotina "Solver" da planilha "Excel" que se encontra disponível entre as ferramentas contempladas por esse aplicativo.

Para demonstrar o procedimento de ajuste dos parâmetros do modelo proposto (Equação 1), usando a rotina "Solver", serão utilizados os dados observados da [Figura 1](#), organizados na forma apresentada na [Tabela 1](#).

Tabela 1. Exemplo de ajuste do modelo proposto, considerando os dados de lâminas de água obtidos de um pivô-central.

| Parâmetros do modelo | | | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|--|
| X_{\max} | X_{\min} | n | m | | SQ |
| 16,50 | 10,5652 | 0,76153 | 1,12830 | | 2,42850221 |
| Coletores | | | Lâminas (mm) | | Quadrado dos desvios ($X_i - \hat{X}_i$) ² |
| Ordem i | Posição d_i (m) | Acumulados a_i (dec) | Observadas X_i | Calculadas \hat{X}_i | |
| 1 | 82 | 0,01792 | 16,5 | 16,19 | 0,0974 |
| 2 | 70 | 0,03322 | 16,0 | 16,00 | 0,0000 |
| 3 | 78 | 0,05026 | 16,0 | 15,82 | 0,0331 |
| 4 | 58 | 0,06294 | 15,6 | 15,69 | 0,0084 |
| 5 | 74 | 0,07911 | 15,5 | 15,54 | 0,0016 |
| 6 | 122 | 0,10577 | 15,5 | 15,30 | 0,0382 |
| 7 | 46 | 0,11582 | 15,0 | 15,22 | 0,0485 |
| 8 | 50 | 0,12675 | 15,0 | 15,13 | 0,0171 |
| 9 | 62 | 0,14030 | 15,0 | 15,02 | 0,0005 |
| 10 | 86 | 0,15909 | 15,0 | 14,88 | 0,0152 |
| 11 | 126 | 0,18663 | 15,0 | 14,67 | 0,1079 |
| 12 | 134 | 0,21591 | 15,0 | 14,46 | 0,2892 |
| 13 | 66 | 0,23033 | 14,4 | 14,36 | 0,0014 |
| 14 | 138 | 0,26049 | 14,0 | 14,16 | 0,0251 |
| 15 | 54 | 0,27229 | 13,5 | 14,08 | 0,3370 |
| 16 | 118 | 0,29808 | 13,5 | 13,91 | 0,1713 |
| 17 | 130 | 0,32649 | 13,5 | 13,74 | 0,0553 |
| 18 | 146 | 0,35839 | 13,5 | 13,54 | 0,0016 |
| 19 | 150 | 0,39117 | 13,5 | 13,35 | 0,0238 |
| 20 | 154 | 0,42483 | 13,5 | 13,15 | 0,1214 |
| 21 | 142 | 0,45586 | 13,2 | 12,98 | 0,0497 |
| 22 | 158 | 0,49038 | 13,0 | 12,79 | 0,0449 |
| 23 | 174 | 0,52841 | 12,5 | 12,59 | 0,0073 |
| 24 | 186 | 0,56906 | 12,5 | 12,38 | 0,0156 |
| 25 | 18 | 0,57299 | 12,0 | 12,36 | 0,1261 |
| 26 | 38 | 0,58129 | 12,0 | 12,31 | 0,0980 |
| 27 | 42 | 0,59047 | 12,0 | 12,27 | 0,0712 |
| 28 | 90 | 0,61014 | 12,0 | 12,17 | 0,0285 |
| 29 | 94 | 0,63068 | 12,0 | 12,07 | 0,0046 |
| 30 | 162 | 0,66608 | 12,0 | 11,90 | 0,0104 |
| 31 | 170 | 0,70323 | 12,0 | 11,72 | 0,0760 |
| 32 | 98 | 0,72465 | 11,5 | 11,63 | 0,0160 |
| 33 | 106 | 0,74781 | 11,5 | 11,52 | 0,0005 |
| 34 | 178 | 0,78671 | 11,5 | 11,35 | 0,0217 |
| 35 | 190 | 0,82823 | 11,5 | 11,18 | 0,1036 |
| 36 | 30 | 0,83479 | 11,4 | 11,15 | 0,0619 |
| 37 | 34 | 0,84222 | 11,4 | 11,12 | 0,0779 |
| 38 | 102 | 0,86451 | 11,0 | 11,03 | 0,0010 |
| 39 | 110 | 0,88855 | 11,0 | 10,94 | 0,0038 |
| 40 | 182 | 0,92832 | 11,0 | 10,79 | 0,0439 |
| 41 | 22 | 0,93313 | 10,5 | 10,77 | 0,0747 |
| 42 | 26 | 0,93881 | 10,5 | 10,75 | 0,0642 |
| 43 | 114 | 0,96372 | 10,5 | 10,67 | 0,0286 |
| 44 | 166 | 1,00000 | 10,5 | 10,57 | 0,0043 |

É importante esclarecer que, no caso de pivô-central, a fração de área, representada em coletor, varia em função da distância em que ela se encontra do ponto pivô, a qual pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} fa_i &= \frac{2 \pi e d_i}{2 \pi e (d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N)} \\ &= \frac{d_i}{(d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N)} \end{aligned} \quad (5)$$

onde: e : constante correspondente ao espaçamento entre coletores; i : número de ordem de cada coletor; d_i : distância do coletor de ordem i , em relação ao ponto pivô; fa_i : fração de área, associada a um coletor de ordem i , em relação à área total; N : número de ordem do coletor mais distante do ponto pivô. Nessa definição, pode ser, facilmente, demonstrado que o termo $2\pi e d_i$ é exatamente igual a área da coroa circular representada pelo coletor de ordem i , o qual se encontra posicionado na circunferência de raio d_i .

A área relativa acumulada, correspondente a cada coletor, pode ser calculada, somando-se, seqüencialmente, a partir do primeiro até o coletor desejado, cada fração de área correspondente, definida pela Equação 5, resultando na seguinte fórmula:

$$a_k = \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N)} \sum_{i=1}^k d_i \quad (6)$$

onde k : número de ordem de um coletor qualquer e a_k : área relativa acumulada, associada a um coletor de ordem k . Para fins de exemplificação, utilizando os dados apresentados na Tabela 1, sugere-se verificar que a soma de todas as distâncias é igual 4576 e que a soma das distâncias até o coletor de ordem 10 é igual a 728, resultando na fração de área acumulada (Equação 6) de 0,15909, correspondente a esse coletor.

Antes de acionar a rotina "Solver", a referida planilha de dados ([Tabela 1](#)) já deve estar aberta para uso. Em seguida, a rotina "Solver", deve ser, então, acessada na barra superior de ferramentas da planilha "Excel". Caso essa rotina não esteja disponível, é necessário acionar, nessa mesma barra de rolagem, a

opção “Suplementos” para habilitá-la. Se ela não estiver disponível para habilitação, então será necessário utilizar o disco de instalação do programa “Excel” para adicionar essa opção. Uma vez concluída essas etapas, a rotina “Solver” deve ser acionada para obter as telas mostradas na Figura 2.



Figura 2. Telas da rotina “Solver”, usadas no processo de otimização dos parâmetros de ajuste do modelo proposto e obtenção da representação analítica das lâminas de água aplicada em função da fração de área acumulada.

Na tela superior (Figura 2), encontram-se indicadas e preenchidas as informações necessárias para uso da rotina “Solver”. É importante salientar alguns aspectos da tela “Parâmetros do Solver” para melhor domínio na utilização dessa rotina. A célula indicada como destino, a qual nesse caso está selecionada como “\$I\$4”, deve conter a soma dos quadrados dos desvios (Equação 4), verificada entre os

dados observados e os valores calculados pelo modelo (Equação 1). Como o objetivo da regressão é minimizar essa soma de quadrados (SQ), então, deve-se selecionar a opção “Min” da referida tela superior (Figura 2). No espaço reservado para as células variáveis estão exatamente as células (\$B\$4; \$C\$4; \$D\$4; \$F\$4), as quais contêm, respectivamente, os valores iniciais atribuídos a X_{\max} , X_{\min} , n e m . No espaço reservado para restrições às variáveis do modelo estão indicadas as seguintes informações: a primeira restrição estabelece que X_{\max} seja menor ou igual ao maior valor do conjunto de observações X_i ; a segunda restrição impõe que $X_{\max} \geq X_{\min}$; a terceira restrição determina que $X_{\min} \geq 0$; a quarta e quinta restrições determinam que n e m sejam positivos.

Feitas essas verificações, basta pressionar o botão “Resolver” e a rotina “Solver” será acionada, e o procedimento interno de regressão não linear entrará em ação, indicando na barra inferior da tela do programa Excel, a evolução do processo de otimização, no qual SQ será reduzido a um valor menor possível para o conjunto de dados considerados. Ao finalizar esse procedimento, a tela inferior (Figura 2) será apresentada, indicando que o processo foi bem-sucedido e que a rotina “Solver” encontrou uma solução adequada, atendendo a todas as restrições e as condições estabelecidas. Caso aconteça algum erro na montagem das informações requeridas na tela superior (Figura 2), o programa apresentará uma mensagem de erro e o usuário deverá verificar o motivo de tal ocorrência.

Se a operação foi bem-sucedida, conforme indica a tela inferior (Figura 2), basta pressionar o botão “OK” e o processo de otimização estará concluído. É importante salientar que, por se tratar de um processo de regressão não linear, é possível que a solução encontrada não seja, ainda, a solução verdadeira e, por isso, recomenda-se acionar o procedimento da rotina “Solver” mais de uma vez, para se certificar de que os parâmetros encontrados se mantêm constantes, indicando, assim, que a solução encontrada representa o mínimo global esperado.

Além disso, como em todo processo de minimização não linear, os valores iniciais, atribuídos pelo usuário aos parâmetros a serem ajustados, devem ser próximos da solução esperada, para que o algoritmo iterativo conduza, realmente, ao mínimo global. Por isso, sugere-se que sejam adotadas como estimativas iniciais para X_m e X_n , os respectivos valores máximo e mínimo do conjunto de dados observados e, para as estimativas, tanto de n como de m , o

valor de 0,5. Nesse exemplo, os valores encontrados para os parâmetros de ajuste foram os seguintes: $X_m = 16,50$; $X_n = 10,5653$; $n = 0,7615$; $m = 1,1283$, para uma soma de quadrados de erros residuais, $SQ = 2,428502$ ([Tabela 1](#)).

Função de Distribuição de Probabilidade da Água Aplicada

O modelo proposto, em sua forma reduzida (Equação 1), pode ser representado, em termos de uma função de distribuição, nos moldes das funções de distribuição de probabilidade tradicionais (uniforme, normal, lognormal, gama, beta, entre outras), reconhecendo que o perfil de água varia na área irrigada em torno de um valor médio, com determinado grau de dispersão. A idéia de se associar o perfil de água aplicada em uma área irrigada a uma função de distribuição estatística foi extensamente abordada por [Hart & Reynolds \(1965\)](#).

Nessa associação, a fração de área acumulada (Equação 3) representa a variável aleatória e as lâminas ou vazões coletadas, ordenadas de forma decrescente e reduzidas na escala de 0 a 1, representam a variável de distribuição cumulativa de probabilidade.

Distribuição Cumulativa de Probabilidade

Para expressar a Equação 3 em termos de uma função de distribuição cumulativa de probabilidade (fdc), nos moldes de uma função de distribuição estatística, faz-se necessário, reescrevê-la da seguinte forma:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - (1 - a^n)^m & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

A reformulação da Equação 3, introduzindo a diferença em relação a 1, é necessária para transformar a função $F(a)$ de decrescente para forma crescente, no intervalo de 0 a 1, com a variável a no domínio $-\infty$ a $+\infty$. Utilizando, os

parâmetros obtidos com os dados de lâmina coletados apresentados na [Tabela 1](#) ($m = 1,12830$ e $n = 0,76153$), a fdc correspondente a este caso poderá ser, graficamente, representada pela Figura 3.

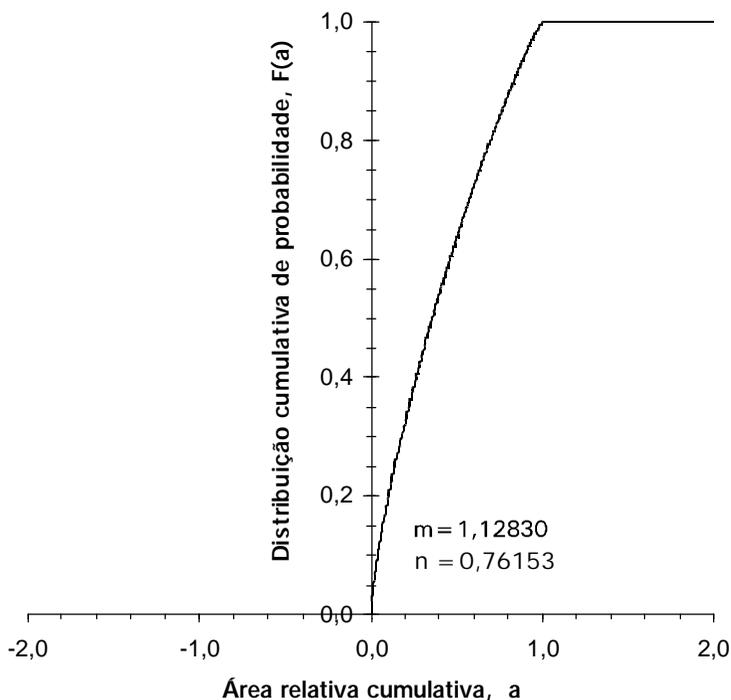


Figura 3. Função de distribuição cumulativa de probabilidade, associada às lâminas de água aplicada por um sistema de irrigação do tipo pivô-central, correspondente ao modelo proposto.

É importante salientar que esse modelo pode apresentar uma variedade considerável de formatos, dependendo dos valores de m e n encontrados.

Densidade de Probabilidade da Distribuição

A função de densidade de probabilidade da distribuição estatística (fpd) pode ser derivada a partir de sua contraparte fdc, sabendo que:

$$f(a) = \frac{dF(a)}{da} \quad (8)$$

Derivando-se a fdc (Equação 7), obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{d}{da} \left[1 - (1 - a^n)^m \right] \\ &= -m (1 - a^n)^{(m-1)} \frac{d}{da} (1 - a^n) \\ &= m (1 - a^n)^{(m-1)} (n) a^{(n-1)} \end{aligned} \quad (9)$$

Para atender aos requisitos de uma função de probabilidade de distribuição, faz-se necessário que:

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 0 \\ m (1 - a^n)^{(m-1)} (n) a^{(n-1)} & \text{se } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{se } a \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

a qual deve estar sujeita à seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a) da = 1 \quad (11)$$

Esse requisito pode ser facilmente verificado, integrando $f(a)$ sobre seu domínio (Equação 10), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) da &= \int_0^1 f(a) da \\ &= \int_0^1 m(1 - a^n)^{(m-1)} (n) a^{(n-1)} da \\ &= m \int_0^1 (1 - a^n)^{(m-1)} n a^{(n-1)} da \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando a técnica de substituição de variáveis para integração da Equação 12, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} u &= a^n & a = 0 &\Rightarrow u = 0 \\ du &= n a^{n-1} da & a = 1 &\Rightarrow u = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Introduzindo as igualdades da Equação 13 na Equação 12, tem-se como resultado a seguinte solução:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) da &= m \int_0^1 (1 - a^n)^{(m-1)} n a^{(n-1)} da \\ &= m \int_0^1 (1 - u)^{(m-1)} du \end{aligned} \quad (14)$$

A integração da Equação 14 pode ser alcançada, procedendo-se a mais uma substituição de variáveis, utilizando as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} z &= 1 - u & u = 0 &\Rightarrow z = 1 \\ dz &= -du & u = 1 &\Rightarrow z = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Aplicando essa técnica de substituição de variáveis na equação 14, tem-se finalmente o seguinte:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) da &= m \int_1^0 z^{(m-1)} (-dz) \\ &= m \int_0^1 z^{(m-1)} dz \\ &= m \left. \frac{z^m}{m} \right|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Na [Figura 4](#), representa-se a referida função de distribuição de probabilidade (Equação 10), utilizando os parâmetros m e n acima determinados. Vale ressaltar, mais uma vez, que essa função possui grande variedade de formatos, dependendo dos valores dos parâmetros m e n encontrados.

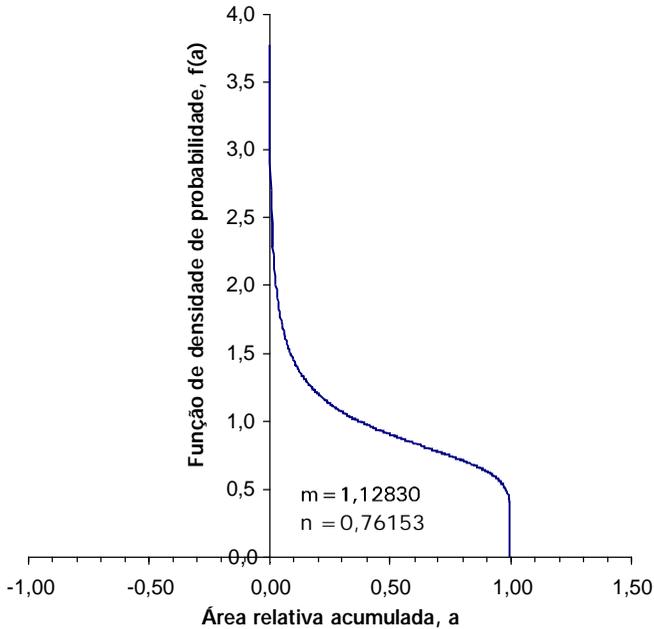


Figura 4. Função de densidade de probabilidade da distribuição, associada às lâminas de água aplicada por um sistema de irrigação do tipo pivô-central, correspondente ao modelo de ajuste proposto.

Por causa da natureza aleatória associada a qualquer variável de probabilidade, não é possível prever, com exatidão, o valor que ela assumirá em um dado evento. Entretanto, é possível descrever seu comportamento em termos dos parâmetros característicos de cada modelo. Dois dos principais parâmetros característicos de um modelo de probabilidade são média e variância. A média de um conjunto de valores observados indica a tendência central do conjunto de dados, e a variância indica seu grau de dispersão.

Média da Função Densidade de Probabilidade da Distribuição

A média de uma função densidade de distribuição $f(a)$ pode ser definida da seguinte maneira ([Beck & Arnold, 1977](#)):

$$m_a = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a) da$$

(17)

Introduzindo expressão que define $f(a)$ de acordo com a Equação 10 e observando que ela só possui valores significativos no intervalo de 0 a 1, tem-se o seguinte:

$$m_a = \int_0^1 a m (1 - a^n)^{(m-1)} n a^{(n-1)} da \quad (18)$$

Para solução da referida média, podem-se utilizar as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} u = a^n &\Leftrightarrow a = u^{1/n} & a = 0 &\Rightarrow u = 0 \\ du = n a^{n-1} da & & a = 1 &\Rightarrow u = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Realizando as devidas substituições na Equação 18 dos termos da Equação 19, tem-se o seguinte:

$$m_a = m \int_0^1 u^{1/n} (1 - u)^{(m-1)} du \quad (20)$$

A integral da Equação 20 pode ser resolvida em termos da função Beta completa, reconhecendo que sua definição pode ser expressa da seguinte maneira ([Abramowitz & Stegun, 1972](#)):

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1 - u)^{\beta-1} du \quad (21)$$

Em decorrência disso, a média da função densidade (Equação 20) pode ser dada, em termos da função Beta, pela seguinte fórmula:

$$m_a = m B\left(\frac{1}{n} + 1, m\right) \quad (22)$$

A função Beta, por sua vez, pode ser representada em termos da função Gama da seguinte maneira ([Abramowitz & Stegun, 1972](#)):

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (23)$$

De modo que, a média da variável aleatória m_a (Equação 22) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 m_a &= m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + m + 1\right)} \\
 &= m \frac{\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(m)}{\left(\frac{1}{n} + m\right) \Gamma\left(\frac{1}{n} + m\right)} \\
 &= \left(\frac{m}{1 + nm}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + m\right)}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Reconhecendo que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ (Abramowitz & Stegun, 1972).

Considerando os parâmetros de ajuste encontrados para o caso exemplificado na [Tabela 1](#) ($m = 1,12830$ e $n = 0,76153$), pode-se então calcular a média da função densidade de probabilidade, utilizando a Equação 24 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 m_a &= \left[\frac{1,1283}{1 + (0,7615)(1,1283)} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{1}{0,7615}\right) \Gamma(1,1283)}{\Gamma\left(\frac{1}{0,7615} + 1,1283\right)} \\
 &= [0,606874] \frac{\Gamma(1,3132) \Gamma(1,1283)}{\Gamma(2,4415)} \\
 &= [0,606874] \frac{(0,89556)(0,940545)}{(1,276844)} \\
 &= 0,400343
 \end{aligned} \tag{25}$$

Os valores da função Gama podem ser facilmente encontrados em tabelas ou expressões algébricas ([Abramowitz & Stegun, 1972](#)), obtidas em pacotes estatísticos ([SAS, 1990](#)) ou, ainda, diretamente da planilha eletrônica [Microsoft Corporation \(1994\)](#). Nesse exemplo, os resultados da função Gama foram

obtidos, utilizando a planilha "Excel", reconhecendo, por exemplo, que $\Gamma(m) = \text{EXP}(\text{LNGAMA}(m))$, onde $\text{EXP}()$ e $\text{LNGAMA}()$ são funções do programa "Excel".

Variância da Função Densidade de Probabilidade da Distribuição

A variância da função densidade de probabilidade de distribuição $f(a)$ pode ser definida da seguinte maneira (Beck & Arnold, 1977):

$$\begin{aligned}
 \sigma_a^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_a)^2 f(a) da \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 - 2am_a + m_a^2) f(a) da \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a) da - 2m_a \int_{-\infty}^{\infty} a f(a) da + m_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(a) da \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a) da - 2m_a m_a + m_a^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a) da - m_a^2
 \end{aligned} \tag{26}$$

Introduzindo $f(a)$ definida pela Equação 10 e observando que ela só possui valores significativos no intervalo de 0 a 1, tem-se o seguinte:

$$\sigma_a^2 = \int_0^1 a^2 m (1 - a^n)^{(m-1)} n a^{(n-1)} da - m_a^2 \tag{27}$$

Utilizando as substituições indicadas pelas igualdades na Equação 19 na Equação 27, tem-se o seguinte resultado simplificado:

$$\begin{aligned}
 \sigma_a^2 &= m \int_0^1 u^{\frac{2}{n}} (1 - u)^{(m-1)} du - m_a^2 \\
 &= m B\left(\frac{2}{n} + 1, m\right) - m_a^2
 \end{aligned} \tag{28}$$

Introduzindo a definição da função Beta em termos da função Gama, tem-se que:

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= m \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+m+1\right)} - m_a^2 \\ &= \frac{2m}{(2+mn)} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+m\right)} - m_a^2\end{aligned}\quad (29)$$

É importante salientar que seria desejável que a variância fosse definida em termos de uma expressão simples, descrita diretamente pelos parâmetros do modelo, para que fosse de utilidade na construção, a partir da média e da variância, da função de probabilidade resultante. Ou seja, uma vez conhecidos os dados observados e calculando sua média e variância, os parâmetros do modelo estariam automaticamente determinados, o que não é o caso dessa formulação matemática. É claro que, com os recursos mais facilmente disponíveis das ferramentas de regressão não linear, a exemplo da rotina “Solver” do programa “Excel” e outros programas, essa limitação pouco importa. No caso do modelo proposto, a alternativa é calcular seus parâmetros de ajuste, por meio de regressão não linear, e, a partir deles, determinar os demais parâmetros derivados.

Considerando os dados apresentados na [Tabela 1](#), a variância de a , calculada pela Equação 20, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= \left[\frac{2(1,1283)}{2 + (0,7615)(1,1283)} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{2}{0,7615}\right)\Gamma(1,1283)}{\Gamma\left(\frac{2}{0,7615} + 1,1283\right)} - (0,40034)^2 \\ &= [0,78924] \frac{\Gamma(2,62640)\Gamma(1,1283)}{\Gamma(2,85920)} - 0,160272 \\ &= [0,78924] \frac{(1,458485)(0,940545)}{(4,44761)} - 0,160275 \\ &= 0,083149\end{aligned}\quad (30)$$

Aplicação do Modelo Proposto na Análise de Desempenho da Irrigação

Uma vez ajustado o modelo aos dados observados, então todos os indicadores de desempenho da irrigação podem ser diretamente calculados a partir do perfil de água modelado. Essa abordagem é altamente desejável conforme preconiza [Solomon \(1983\)](#). Nesse caso, o modelo proposto será utilizado como base de desenvolvimento das principais relações necessárias na análise de desempenho da irrigação, utilizando os valores de m , n , X_{\max} e X_{\min} que já foram determinados anteriormente ([Tabela 1](#)).

Coeficiente de Uniformidade de Christiansen (CUC)

De maneira geral, o valor de CUC, que reflete a relação entre a média absoluta dos desvios e a média geral aplicada ([Christiansen, 1942](#)), pode ser definido da seguinte forma:

$$CUC = 100 \left(1 - \frac{|\bar{D}|}{\bar{X}} \right) \quad (31)$$

onde $|\bar{D}|$: média dos desvios absolutos e \bar{X} : média geral do perfil de água aplicada. A seguir, serão apresentadas as deduções das fórmulas de cálculo e suas exemplificações para os termos $|\bar{D}|$ e \bar{X} , necessários à determinação do CUC.

Lâmina média aplicada

É importante relembrar as definições de lâmina estabelecidas pelas Equações 1 e 3. A primeira definição (Equação 1) considera a variável \hat{X} na unidade em que foi medida, enquanto a segunda definição (Equação 3) considera essa mesma variável expressa em sua forma reduzida, representada por x . Por isso, a média da lâmina aplicada pode ser deduzida, quanto na sua forma reduzida, representada por \bar{x} , quanto na sua forma absoluta, representado por \bar{X} .

Desse modo, partindo-se da Equação 3, a fórmula para o cálculo da média reduzida do perfil de água aplicada pode ser derivada, considerando a seguinte definição:

$$\bar{x} = \int_0^1 (1 - a^n)^m da \quad (32)$$

Fazendo uso das igualdades indicadas na Equação 19 para realizar as substituições desejadas, então o valor de \bar{x} se transforma na seguinte integração:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \int_0^1 u^{\frac{(1-n)}{n}} (1-u)^m du \quad (33)$$

Finalmente, considerando a definição da função Beta dada pela Equação 21, a Equação 33, pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} B\left(\frac{1-n}{n} + 1, m + 1\right) \\ &= \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, m + 1\right) \end{aligned} \quad (34)$$

Por sua vez, tomando-se a definição da função Beta apresentada na Equação 23, em termos da função Gama, tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + m + 1\right)} \\ &= \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) m \Gamma(m)}{\left(\frac{1}{n} + m\right) \Gamma\left(\frac{1}{n} + m\right)} \\ &= \frac{m}{(1+mn)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + m\right)} \end{aligned} \quad (35)$$

Fazendo uso da propriedade $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ da função Gama (Abramowitz & Stegun, 1972) nas simplificações acima, o resultado encontrado é exatamente igual à fórmula de média derivada na Equação 24.

A fórmula para o cálculo da média geral \bar{X} , expressa na unidade de medida da água aplicada, pode ser derivada, integrando a variável \hat{X} , definida pela Equação 1, no domínio não nulo da variável a (0 a 1), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \int_0^1 \left[X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) (1 - a^n)^m \right] da \\
 &= \int_0^1 X_{\min} da + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^1 (1 - a^n)^m da \\
 &= X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \bar{x}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Esse resultado é obtido, utilizando a condição do integrando X_{\min} ser constante na primeira integral e o \bar{x} ser a solução da segunda integral (Equação 32).

Dessa forma, ao serem utilizados, os valores absolutos calculados de $X_{\min} = 10,5652$ e $X_{\max} = 16,50$, pode-se determinar o valor de \bar{X} , para o caso exemplificado, empregando a Equação 36 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \bar{x} \\
 &= 10,5652 + (16,50 - 10,5652)(0,400343) \\
 &= 12,94
 \end{aligned} \tag{37}$$

Esse resultado representa exatamente a lâmina média correspondente ao perfil de água modelado pela equação 1.

Média dos desvios absolutos

Para o cálculo da média dos desvios absolutos, a qual representa a média dos desvios dos valores da variável reduzida em relação aos valores observados, também será empregada a lógica de primeiro calcular a média reduzida dos desvios absolutos $|\bar{d}|$, para depois calcular, a partir dela, a média dos desvios absolutos $|\bar{D}|$, na unidade de medida em que foi realizada a coleta dos dados.

A média reduzida dos desvios pode ser derivada, utilizando a seguinte definição, encontrada em [Warrick \(1983\)](#):

$$|\bar{d}| = \int_0^{a_L} (x - \bar{x}) da + \int_{a_L}^1 (\bar{x} - x) da \tag{38}$$

É importante ressaltar que ao se ajustar qualquer modelo aos dados de lâmina de água coletada, utilizando o método de regressão, o processo trata de dividir igualmente as áreas em excesso e em deficiência, minimizando a soma dos

quadrados dos erros entre os valores observados e calculados. Nessa modelagem, o termo a_L representa exatamente o valor específico da área relativa acumulada, no qual o valor de \hat{X} do perfil modelado coincide com a lâmina média de água aplicada, ou seja, é o ponto onde o perfil deixa de ser excedente e passa a ser deficiente.

A fórmula de cálculo do valor de a_L pode ser definida diretamente da Equação 3, considerando que $x = \bar{x}$ para $a = a_L$, da seguinte maneira:

$$a_L = \left(1 - \bar{x}^m\right)^{1/n} \quad (39)$$

A Equação 38 pode ser resolvida, empregando o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} |\bar{d}| &= \int_0^{a_L} (x - \bar{x}) da + \int_{a_L}^1 (\bar{x} - x) da \\ &= \int_0^{a_L} x da - \int_0^{a_L} \bar{x} da + \int_0^1 (\bar{x} - x) da - \int_0^{a_L} (\bar{x} - x) da \\ &= \int_0^{a_L} x da - \int_0^{a_L} \bar{x} da + \int_0^1 \bar{x} da - \int_0^1 x da - \int_0^{a_L} \bar{x} da + \int_0^{a_L} x da \\ &= \int_0^{a_L} x da - \int_0^{a_L} \bar{x} da + \bar{x} - \bar{x} - \int_0^{a_L} \bar{x} da + \int_0^{a_L} x da \\ &= 2 \int_0^{a_L} x da - 2 \int_0^{a_L} \bar{x} da \\ &= 2 \int_0^{a_L} x da - 2 \bar{x} a_L \end{aligned} \quad (40)$$

Substituindo a variável x por sua definição (Equação 3), a Equação 40 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |\bar{d}| &= 2 \int_0^{a_L} x da - 2 \bar{x} a_L \\ &= 2 \int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - 2 \bar{x} a_L \end{aligned} \quad (41)$$

Utilizando as substituições pertinentes indicadas na Equação 42:

$$u = a^n \Rightarrow a = u^{1/n} \quad \text{se } a = 0 \Rightarrow u = 0; \quad a = a_L \Rightarrow u = (a_L)^n$$

$$du = n a^{n-1} da \quad du = n u^{\frac{(n-1)}{n}} da \Rightarrow da = \frac{1}{n} u^{-\frac{(1-n)}{n}} du \quad (42)$$

Tem-se como resultado para Equação 41 a seguinte expressão:

$$|d| = 2 \int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - 2 \bar{x} a_L$$

$$= \frac{2}{n} \int_0^{a_L^n} u^{-\frac{(1-n)}{n}} (1-u)^m du - 2 \bar{x} a_L \quad (43)$$

A integral resultante da Equação 43 pode ser expressa em termos da função Beta incompleta, aplicando a seguinte definição encontrada em [Abramowitz & Stegun \(1972\)](#):

$$B_\lambda(\alpha, \beta) = \int_0^\lambda u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du \quad (44)$$

De forma que, a Equação 43 resulta em:

$$|d| = \frac{2}{n} \int_0^{a_L^n} u^{-\frac{(1-n)}{n}} (1-u)^m du - 2 \bar{x} a_L$$

$$= \frac{2}{n} B_{a_L^n} \left(\frac{(1-n)}{n} + 1, m + 1 \right) - 2 \bar{x} a_L \quad (45)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{n} B_{a_L} \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) - \bar{x} a_L \right]$$

É importante salientar que existe uma relação entre a função Beta incompleta e a função Beta completa, expressa da seguinte maneira ([Abramowitz & Stegun 1972](#)):

$$I_\lambda(a, b) = \frac{B_\lambda(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\int_0^\lambda u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du}{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du} \quad (46)$$

De modo que, para $\lambda = a_L^n$, $\alpha = \frac{1}{n}$ e $\beta = m + 1$, tem-se:

$$B_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m + 1 \right) = I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) B \left(\frac{1}{n}; m + 1 \right) \quad (47)$$

Substituindo a Equação 47 na Equação 45 e considerando a definição de \bar{X} expressa pela Equação 34, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} |\bar{d}| &= 2 \left[\frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}; m + 1 \right) I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m + 1 \right) - \bar{x} a_L \right] \\ &= 2 \left[\bar{x} I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m + 1 \right) - \bar{x} a_L \right] \\ &= 2 \bar{x} \left[I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m + 1 \right) - a_L \right] \end{aligned} \quad (48)$$

Segundo [Abramowitz & Stegun \(1972\)](#), a função Beta incompleta se relaciona com a função de distribuição F da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_\lambda(\alpha, \beta) &= \text{DISTF}(f; 2\beta; 2\alpha) \\ \text{onde } f &= \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

onde DISTF() é a função estatística da planilha eletrônica "Excel" que retorna um valor da Distribuição F, associado aos parâmetros $(f; 2\beta; 2\alpha)$.

De modo que, a Equação 48 pode ser expressa da seguinte maneira:

$$|\bar{d}| = 2 \bar{x} \left\{ \text{DISTF} [f; 2(m + 1); 2(1/n)] - a_L \right\} \quad (50)$$

Exemplificando com os parâmetros do modelo ajustado, $a_L = 0,46235$, $n = 0,76153$ e $m = 1,12830$, os termos para avaliação da função de distribuição F são os seguintes:

$$\begin{aligned} a_L^n &= (0,46235)^{(0,76153)} \\ &= 0,55573 \end{aligned} \quad (51)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned}
 f &= \left(\frac{1/n}{m+1} \right) \left(\frac{1-a_L^n}{a_L^n} \right) \\
 &= \left(\frac{1,31313}{2,12830} \right) \left(\frac{1-0,55573}{0,55573} \right) \\
 &= 0,49324
 \end{aligned} \tag{52}$$

Desse modo, o valor de $|\bar{d}|$, para o caso exemplificado, pode ser calculado da seguinte forma (Equação 50):

$$\begin{aligned}
 |\bar{d}| &= 2 \bar{x} \{ \text{DISTF} [f; 2(m+1); 2(1/n)] - a_L \} \\
 &= 2 (0,400343) \{ 0,753386 - 0,462342 \} \\
 &= 0,233035
 \end{aligned} \tag{53}$$

Esse resultado representa exatamente a média dos desvios absolutos em sua forma reduzida. Para se obter a expressão que transforma $|\bar{d}|$ na média dos desvios $|\bar{D}|$, é necessário, primeiramente, considerar a seguinte definição:

$$\begin{aligned}
 |\bar{D}| &= \int_0^{a_L} (\hat{X} - \bar{X}) da + \int_{a_L}^1 (\bar{X} - \hat{X}) da \\
 &= 2 \int_0^{a_L} \hat{X} da - 2 \bar{X} a_L
 \end{aligned} \tag{54}$$

Substituindo os termos \hat{X} e \bar{X} da Equação 54 por suas definições decorrentes da Equação 1 e considerando, também, a definição de \bar{X} expressa pela Equação 32, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
 |\bar{D}| &= 2 \int_0^{a_L} \hat{X} da - 2 \bar{X} a_L \\
 &= 2 \int_0^{a_L} [X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1-a^n)^m] da - 2 [X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1-a_L^n)^m] a_L \\
 &= 2 \int_0^{a_L} X_{\min} da + 2(X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{a_L} (1-a^n)^m da - 2X_{\min} a_L - 2(X_{\max} - X_{\min})(1-a_L^n)^m a_L \\
 &= 2X_{\min} a_L + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{a_L} 2(1-a^n)^m da - 2X_{\min} a_L - 2(X_{\max} - X_{\min}) \bar{x} a_L \\
 &= (X_{\max} - X_{\min}) \left[2 \int_0^{a_L} (1-a^n)^m da - 2\bar{x} a_L \right]
 \end{aligned} \tag{55}$$

Reconhecendo que o termo em colchete é exatamente a fórmula dada pela Equação 41, então a Equação 55 pode ser simplificada na seguinte expressão:

$$|\bar{D}| = (X_{\max} - X_{\min}) |\bar{d}| \quad (56)$$

De modo que, para o exemplo dado, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} |\bar{D}| &= (X_{\max} - X_{\min}) |\bar{d}| \\ &= (16,50 - 10,5652) (0,233035) \\ &= 1,38302 \end{aligned} \quad (57)$$

Esse resultado representa exatamente a média dos desvios absolutos entre as lâminas de água aplicada e a média geral obtida, utilizando o perfil de água modelado pela equação 1.

Exemplo de cálculo do CUC

Considerando os dados relativos ao exemplo estudado, onde $|\bar{D}| = 1,38302$ e $\bar{X} = 12,94$, tem-se o seguinte resultado de CUC:

$$\begin{aligned} \text{CUC} &= 100 \left(1 - \frac{|\bar{D}|}{\bar{X}} \right) \\ &= 100 \left(1 - \frac{1,38302}{12,94} \right) \\ &= 89,31\% \end{aligned} \quad (58)$$

Esse resultado representa a uniformidade geral da irrigação, ou seja, nesse caso existe igualmente 5,345% da água aplicada, em excesso e 5,345% em deficiência.

Coefficiente de Uniformidade de Distribuição (CUD)

Outro indicador de uniformidade bastante utilizado na avaliação de sistemas de irrigação é o Coeficiente de Uniformidade de Distribuição que se baseia na relação entre a média do quartil inferior e a média geral aplicada ([Davis, 1966](#)). Para essa determinação, é necessário primeiramente derivar a fórmula de cálculo da média do quartil inferior, uma vez que a média geral já foi desenvolvida anteriormente (Equação 36).

Expressando a definição do CUD matematicamente, tem-se o seguinte:

$$\text{CUD} = 100 \left(\frac{\bar{X}_q}{\bar{X}} \right) \quad (59)$$

onde \bar{X}_q : média, em relação ao quartil inferior, dos valores de água aplicada.

Lâmina média do quartil inferior

À semelhança da abordagem empregada no cálculo da média geral, aqui também, será empregada a idéia da média reduzida, ou seja, primeiro será calculada a média reduzida do quartil inferior e, posteriormente, a média do quartil inferior, propriamente dita.

A média reduzida do quartil inferior pode ser encontrada, seguindo a definição dada por [Warrick \(1983\)](#), expressa da seguinte maneira:

$$\bar{X}_q = \frac{\int_{3/4}^1 x \, da}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)} \quad (60)$$

$$\bar{X}_q = 4 \int_{3/4}^1 x \, da$$

Introduzindo a definição de x da Equação 3, na Equação 60, tem-se que:

$$\bar{X}_q = 4 \int_{3/4}^1 (1 - a^n)^m \, da \quad (61)$$

Para facilitar a integração desta Equação 61 e antecipando ser sua solução expressa em termos da função Beta completa e incompleta, serão realizadas as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \bar{X}_q &= 4 \int_{3/4}^1 (1 - a^n)^m \, da \\ &= 4 \left[\int_0^1 (1 - a^n)^m \, da - \int_0^{3/4} (1 - a^n)^m \, da \right] \end{aligned} \quad (62)$$

Pelo que já foi demonstrado anteriormente (Equações 32-34), a solução da primeira integral resulta na função Beta completa, enquanto a segunda integral resulta na função Beta Incompleta (Equações 43-48), de modo que a solução da Equação 62 poderá ser encontrada empregando o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_q &= 4 \left[\int_0^1 (1-a^n)^m da - \int_0^{3/4} (1-a^n)^m da \right] \\
 &= 4 \left[\frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, m+1\right) - \frac{1}{n} B_{(3/4)^n}\left(\frac{1}{n}, m+1\right) \right] \\
 &= 4 \left[\frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, m+1\right) - I_{(3/4)^n}\left(\frac{1}{n}, m+1\right) \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, m+1\right) \right] \\
 &= 4 \left[\frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, m+1\right) \right] \left\{ 1 - I_{(3/4)^n}\left(\frac{1}{n}, m+1\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{63}$$

Reconhecendo que a função Beta incompleta pode ser expressa em termos da função de distribuição F (Equação 49) e considerando o resultado dado pela Equação 34, o valor de \bar{X}_q pode ser, então, reduzido à seguinte fórmula:

$$\bar{x}_q = 4 \bar{x} \{ 1 - \text{DISTF}[f; 2(m+1); 2(1/n)] \} \tag{64}$$

Exemplificando sua aplicação, com os parâmetros de ajuste já conhecidos do caso em estudo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1/n}{m+1} \left(\frac{1 - (0,75)^n}{(0,75)^n} \right) \\
 &= (0,61702)(0,24492) \\
 &= 0,15112
 \end{aligned} \tag{65}$$

Utilizando a planilha "Excel" para calcular a Distribuição F para o valor de 0,15112, sujeita aos graus de liberdade $2(m+1)$ e $2(1/n)$, sabendo que $\bar{x} = 0,400343$, $n = 0,76153$ e $m = 1,12830$, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_q &= 4 \bar{x} \{ 1 - \text{DISTF}[f; 2(m+1); 2(1/n)] \} \\
 &= 4 \bar{x} \{ 1 - \text{DISTF}[0,15112; 4,25659; 2,6264] \} \\
 &= 4 (0,400343) \{ 1 - 0,94613 \} \\
 &= 0,08626
 \end{aligned} \tag{66}$$

Uma vez conhecido o valor de \bar{X}_q , a média do quartil inferior \bar{X}_q pode ser, então, derivada, considerando a definição de \hat{X} na sua forma absoluta (Equação 1) e realizando os seguintes passos:

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_q &= 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 [X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1-a^n)^m] da \\
 &= 4 \left\{ \int_0^1 [X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1-a^n)^m] da - \int_0^{\frac{3}{4}} [X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1-a^n)^m] da \right\} \\
 &= 4 \left\{ X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^1 (1-a^n)^m da - \frac{3}{4} X_{\min} - (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{\frac{3}{4}} (1-a^n)^m da \right\} \\
 &= 4 \left\{ X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \left[\left(\frac{1}{n} \right) B \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] - \frac{3}{4} X_{\min} - (X_{\max} - X_{\min}) \left(\frac{1}{n} \right) B_{\left(\frac{3}{4} \right)^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right\} \\
 &= 4 \left\{ X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \left[\frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] - \frac{3}{4} X_{\min} - (X_{\max} - X_{\min}) I_{\left(\frac{3}{4} \right)^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right\} \\
 &= 4 \left\{ \frac{1}{4} X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \left[\frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] \left[1 - I_{\left(\frac{3}{4} \right)^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] \right\} \\
 &= \left\{ X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) 4 \left[\frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] \left[1 - I_{\left(\frac{3}{4} \right)^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] \right\} \tag{67}
 \end{aligned}$$

Introduzindo a definição de \bar{X}_q , expressa pela Equação 63, na Equação 67, obtém-se a seguinte fórmula para o cálculo de \bar{X}_q :

$$\bar{X}_q = \{ X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \bar{X}_q \} \tag{68}$$

Exemplificando com os dados da Tabela 1, tem-se o seguinte resultado para a média do quartil inferior:

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_q &= \{ X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \bar{X}_q \} \\
 &= \{ 10,5652 + (16,50 - 10,5652)(0,08626) \} \\
 &= 11,0771 \tag{69}
 \end{aligned}$$

Exemplo de cálculo do CUD

Considerando definição de CUD expressa pela Equação 59 e utilizando os resultados encontrados nas Equações 37 e 69, o valor do CUD, para o exemplo considerado (Tabela 1), é igual a:

$$\begin{aligned}
 \text{CUD} &= 100 \left(\frac{\bar{X}_q}{\bar{X}} \right) \\
 &= 100 \left(\frac{11,0771}{12,94} \right) \\
 &= 85,60\% \tag{70}
 \end{aligned}$$

Esse índice indica que se a lâmina requerida pela cultura for igual à média geral aplicada, a irrigação produzirá uma deficiência média de água de 14,4%, numa área não maior que 25% da área irrigada.

Eficiência de Aplicação de Água da Irrigação

Esse indicador de desempenho expressa a relação entre o volume útil e o total de água aplicada, definido da seguinte maneira:

$$E_A = 100 \left(\frac{\nabla_U}{\nabla_A} \right) \quad (71)$$

onde ∇ : símbolo utilizado para indicar volume de água por unidade área;
 ∇_A : volume total de água aplicado, contido na área delimitada pelo perfil de água modelado ao longo da fração de área acumulada; ∇_U : volume útil aplicado, contido na área delimitada pela média, quando esta for menor ou igual à lâmina aplicada e pelo próprio perfil de água aplicada, quando ele for menor do que a média, ou seja, é o volume da água aplicada que, contido na zona útil de absorção de água da planta, correspondente à lâmina líquida requerida pelas plantas naquela irrigação; E_A : eficiência de aplicação de água da irrigação, equivalente à relação entre a água útil e água total aplicada.

Volume total aplicado

Se a água aplicada for medida em termos de lâmina (mm) e a área em metros quadrados, então ∇_A indicará o volume, em litros, da água aplicada. Ao se adotar o conceito de área adimensional, então ∇_A passa a ter as mesmas unidades de lâmina de água.

A fórmula para o cálculo de ∇_A pode ser obtida a partir da seguinte definição:

$$\nabla_A = \int_0^1 \left[X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1 - a^n)^m \right] da \quad (72)$$

Como se trata de uma integração no intervalo de 0 a 1, então ∇_A é exatamente igual a média geral aplicada \bar{X} . De modo que, utilizando a Equação 36, pode-se estabelecer a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \nabla_A &= \bar{X} \\ &= X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \bar{a} \end{aligned} \quad (73)$$

Exemplificando a aplicação Equação 73, com os parâmetros do caso em questão (Tabela 1), o resultado calculado para ∇_A é o seguinte:

$$\begin{aligned}\nabla_A &= X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \bar{x} \\ &= 10,5652 + (16,50 - 10,5652)(0,400343) \\ &= 12,94\end{aligned}\tag{74}$$

Esse resultado representa exatamente o volume total de água aplicada em uma faixa de área com largura unitária, de modo que pode ser interpretada simplesmente como lâmina de água.

Volume Excedente

O volume de água excedente corresponde a toda água aplicada além do limite definido pela lâmina média. Essa definição não implica que o volume excedente não possa ser aproveitado pela planta. Considerando que os processos de redistribuição da água no solo e de desenvolvimento de raízes são dinâmicos, eventualmente, ao longo do ciclo da cultura, parte dessa água poderá ser utilizada, contribuindo para o aumento na eficiência real de uso da água pela planta.

A definição matemática do volume excedente pode ser inferida da Equação 38, reconhecendo que a primeira integral abrange exatamente a porção do perfil de água que ultrapassa a média aplicada. Nessa abordagem, é importante destacar que o volume excedente derivado a partir do perfil de água reduzido resultará no volume menor de água excedente, identificado por ∇_e .

Deste modo, pode-se estabelecer o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}\nabla_e &= \int_0^{a_L} (x - \bar{x}) \, da \\ &= \int_0^{a_L} x \, da - \int_0^{a_L} \bar{x} \, da \\ &= \int_0^{a_L} x \, da - \bar{x} a_L\end{aligned}\tag{75}$$

A solução da integral resultante na Equação 75 pode ser expressa em termos da função Beta incompleta, seguindo os mesmos procedimentos empregados nas

transformações desde a Equação 41 até 48. Assim procedendo, a Equação 75 passa a ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \nabla_e &= \left[\frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}; m+1\right) I_{a_L}^n\left(\frac{1}{n}; m+1\right) - \bar{x} a_L \right] \\
 &= \left[\bar{x} I_{a_L}^n\left(\frac{1}{n}; m+1\right) - \bar{x} a_L \right] \\
 &= \bar{x} \left[I_{a_L}^n\left(\frac{1}{n}; m+1\right) - a_L \right]
 \end{aligned} \tag{76}$$

Utilizando a relação entre a função Beta incompleta e a Distribuição F, expressa pela Equação 49, o volume excedente fica definido pela seguinte fórmula:

$$\nabla_e = \bar{x} \left[\text{DISTF}(f; 2\beta; 2\alpha) - a_L \right] \tag{77}$$

Exemplificando o cálculo de ∇_e , utilizando os parâmetros do modelo ajustado, $a_L = 0,46235$, $n = 0,76153$ e $m = 1,12830$, sabendo que $\beta = m+1$ e $\alpha = 1/n$ e que $f = 0,49324$ (Equação 52), obtém-se o seguinte valor:

$$\begin{aligned}
 \nabla_e &= \bar{x} \left\{ \text{DISTF}[f; 2(m+1); 2(1/n)] - a_L \right\} \\
 &= (0,400343) \{0,753386 - 0,463415\} \\
 &= 0,11651
 \end{aligned} \tag{78}$$

O volume excedente relativo pode ser transformado no volume excedente, propriamente dito, ∇_E , reconhecendo que a Equação 75 pode ser reescrita em termos dos valores da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \nabla_E &= \int_0^{a_L} (\hat{X} - \bar{X}) da \\
 &= \int_0^{a_L} \hat{X} da - \int_0^{a_L} \bar{X} da \\
 &= \int_0^{a_L} \hat{X} da - \bar{X} a_L
 \end{aligned} \tag{79}$$

Substituindo \hat{X} pela definição dada na Equação 1 e reconhecendo que \bar{X} representa um valor específico de \hat{X} para $a = a_L$, então a Equação 79 pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 V_E &= \int_0^{a_L} \left[X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1 - a^n)^m \right] da - \left[X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min})(1 - a_L^n)^m \right] a_L \\
 &= X_{\min} \int_0^{a_L} da + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - \left[X_{\min} a_L + (X_{\max} - X_{\min}) a_L (1 - a_L^n)^m \right] \\
 &= X_{\min} a_L + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - X_{\min} a_L - (X_{\max} - X_{\min}) a_L (1 - a_L^n)^m \\
 &= (X_{\max} - X_{\min}) \left[\int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - a_L (1 - a_L^n)^m \right] \tag{80}
 \end{aligned}$$

Sabendo que \bar{x} representa, também, um valor específico de x para $a = a_L$ na Equação 3, então a Equação 80 pode ser expressa como segue:

$$\begin{aligned}
 V_E &= (X_{\max} - X_{\min}) \left[\int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - a_L (1 - a_L^n)^m \right] \\
 &= (X_{\max} - X_{\min}) \left[\int_0^{a_L} (1 - a^n)^m da - a_L \bar{x} \right] \\
 &= (X_{\max} - X_{\min}) \left[\int_0^{a_L} x da - a_L \bar{x} \right] \tag{81}
 \end{aligned}$$

Reconhecendo que o termo em colchete é exatamente a definição do volume excedente reduzido expresso pela Equação 75, então a Equação 81 restringe-se à seguinte fórmula:

$$V_E = (X_{\max} - X_{\min}) \nabla_e \tag{82}$$

Aplicando essa definição (Equação 82) ao exemplo dado ([Tabela 1](#)), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 V_E &= (X_{\max} - X_{\min}) \nabla_e \\
 &= (16,50 - 10,5652) (0,11651) \\
 &= 0,6915 \tag{83}
 \end{aligned}$$

Volume deficiente

O volume deficiente de água representa a quantidade de água que faltou para atingir a média aplicada. A definição matemática do volume deficiente pode ser inferida da Equação 38, reconhecendo que a segunda integral dessa equação engloba exatamente a porção da área irrigada em deficiência.

Usando o mesmo procedimento adotado na derivação do volume de água em excesso, primeiro calcula-se o volume deficiente de água reduzido, \forall_d , considerando o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
 \forall_d &= \int_{a_L}^1 (\bar{x} - x) da \\
 &= \int_0^1 (\bar{x} - x) da - \int_0^{a_L} (\bar{x} - x) da \\
 &= \int_0^1 \bar{x} da - \int_0^1 x da - \int_0^{a_L} \bar{x} da + \int_0^{a_L} x da \\
 &= \int_{a_L}^1 x da - \bar{x} a_L
 \end{aligned} \tag{84}$$

A solução da integral da Equação 84 pode ser expressa em termos da função Beta incompleta, usando a mesma abordagem empregada nas transformações das Equações de 41 a 48.

Assim procedendo, a Equação 84 transforma-se na seguinte:

$$\begin{aligned}
 \forall_d &= \left[\frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}; m+1 \right) I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m+1 \right) - \bar{x} a_L \right] \\
 &= \left[\bar{x} I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m+1 \right) - \bar{x} a_L \right] \\
 &= \bar{x} \left[I_{a_L^n} \left(\frac{1}{n}; m+1 \right) - a_L \right]
 \end{aligned} \tag{85}$$

Utilizando a relação entre a função Beta Incompleta e a Distribuição F (Equação 49), o volume excedente pode ser, finalmente, definido por:

$$\nabla_d = \bar{x} \left[\text{DISTF} (f; 2\beta; 2\alpha) - a_L \right] \quad (86)$$

Essa fórmula de cálculo de ∇_d é exatamente igual ao cálculo de ∇_e (Equação 79) demonstrando, assim, ser os dois volumes iguais.

O volume deficiente reduzido pode ser transformado no volume deficiente, propriamente dito, ∇_D , sabendo que:

$$\nabla_D = \int_{a_L}^1 (\bar{X} - \hat{X}) da \quad (87)$$

Da qual é possível deduzir que:

$$\begin{aligned} \nabla_D &= \int_{a_L}^1 \bar{X} da - \int_{a_L}^1 \hat{X} da \\ &= (1 - a_L) \bar{X} - \int_{a_L}^1 \hat{X} da \\ &= \bar{X} - a_L \bar{X} - \left[\int_0^1 \hat{X} da - \int_0^{a_L} \hat{X} da \right] \\ &= \bar{X} - a_L \bar{X} - \left[\bar{X} - \int_0^{a_L} \hat{X} da \right] \\ &= \int_0^{a_L} \hat{X} da - a_L \bar{X} \end{aligned} \quad (88)$$

A Equação 88 é exatamente igual à Equação 79, de modo que se pode inferir a partir da Equação 82 que:

$$\nabla_D = (X_{\max} - X_{\min}) \nabla_d \quad (89)$$

Volume útil

O volume útil representa exatamente a porção da água contida na área delimitada pela média aplicada. De modo que, subtraindo o volume excedente do volume aplicado, obtém-se o volume útil da seguinte maneira:

$$\nabla_U = \nabla_A - \nabla_E \quad (90)$$

Para o problema exemplificado, o resultado do volume útil é o seguinte:

$$\begin{aligned} \nabla_U &= \nabla_A - \nabla_E \\ &= 12,94 - 0,6915 \\ &= 12,2485 \end{aligned} \quad (91)$$

Exemplo de cálculo da E_A

Para o exemplo dado na [Tabela 1](#) e utilizando a Equação 71, obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} E_A &= 100 \left(\frac{12,2485}{12,94} \right) \\ &= 94,66 \end{aligned} \quad (92)$$

Adequação da Irrigação

É importante lembrar que a média aplicada ([Figura 1](#)) é considerada como sendo a lâmina líquida de água requerida pela cultura, ou seja, ela representa exatamente a capacidade que o sistema tem em atender aquele requerimento sem nenhuma majoração ou redução. Nesse enfoque, qualquer porção da área irrigada que recebe a quantidade de água igual ou superior a lâmina média aplicada deve ser considerada como adequadamente irrigada. Dessa maneira, quanto maior a área irrigada com lâminas superiores à média mais adequada será a irrigação. É claro que o aumento na adequação da área irrigada implica redução na eficiência de aplicação, a qual será tanto menor quanto mais desuniforme for o perfil de distribuição da água aplicada.

A média, como uma medida de tendência central, vai indicar o local ótimo desejável no qual todas as lâminas de água deveriam atingir. No entanto, na realidade, como a distribuição da água não é uniforme, parte da área estará com água em excesso e a outra com deficiência. É evidente que, depois do ajuste do modelo, por meio da técnica dos quadrados mínimos, a média dividirá,

exatamente, a área total irrigada, em duas partes iguais, sendo metade em excesso e a outra em deficiência. Se o modelo ajustado fosse, por exemplo, a distribuição normal, essa divisão no eixo representativo das áreas seria exatamente em 0,5, ou seja, 50% da área em excesso e 50% em deficiência. Entretanto, como o modelo proposto não é necessariamente simétrico o qual, por isso, ajusta-se melhor às várias situações encontradas, essa divisão no eixo representativo da fração de área irrigada, neste caso, ocorreu para $a = 0,4623$, ou seja, 46,23% da área se encontram com excesso e o restante com deficiência.

Nesse caso exemplificado, o sistema de irrigação possui os seguintes indicadores de desempenho: $CUC = 89,31$, $CUD = 85,60$, $a_L = 0,4623$, $\forall_E = 0,6915$, $\forall_D = 0,6915$, $E_A = 94,66\%$.

É importante destacar que os indicadores de uniformidade (CUC ou CUD) servem apenas como guia de julgamento do desempenho do sistema em seu papel de distribuição da água aplicada, ou seja, esses indicadores podem ser utilizados, por exemplo, para se estabelecer conceitos sobre seu desempenho (por exemplo, excelente, bom, razoável e ruim), para tomada de decisão sobre a necessidade ou não de se realizar mudanças no funcionamento hidráulico da rede de tubulações de distribuição da água aplicada. É claro que sistemas com baixos valores de uniformidade vão sempre resultar em baixos índices de desempenho, requerendo maiores ajustes na lâmina líquida requerida para que esse sistema opere com adequação de irrigação elevada, resultando, assim, na menor eficiência de aplicação.

Ajuste da área adequadamente irrigada

O ajuste da área adequadamente irrigada é uma operação na qual se busca encontrar o ponto ótimo entre o percentual de área que deve ser mantido recebendo aplicações de água em quantidades iguais ou maiores do que a lâmina requerida pela cultura para satisfazer as exigências de produtividade, com o menor percentual de excesso possível. A água aplicada em excesso aumenta o consumo de energia, reduzindo a margem de lucro do produtor.

Uma vez decidido qual deverá ser o percentual da área que deverá ser mantido adequadamente irrigado, o sistema de irrigação deverá ser operado de modo que o perfil de lâmina aplicada intercepte a lâmina requerida exatamente no ponto

equivalente ao valor de fração de área igual ao percentual estabelecido de área adequadamente irrigada.

Na Figura 5, podem-se observar os perfis de água correspondentes ao ajuste da fração de área adequadamente irrigada de 46,33% para 90%. A média de água aplicada referente ao primeiro perfil é considerada a lâmina requerida pelo cultivo e, portanto, permanece estacionário, enquanto, o segundo perfil é ajustado para a meta estabelecida de 90% para a área adequadamente irrigada. Com esse ajuste, haverá aumento no volume total de água aplicada e, conseqüentemente, no volume de água em excesso e uma redução no volume da água em deficiência, resultando em decréscimo da eficiência de aplicação.

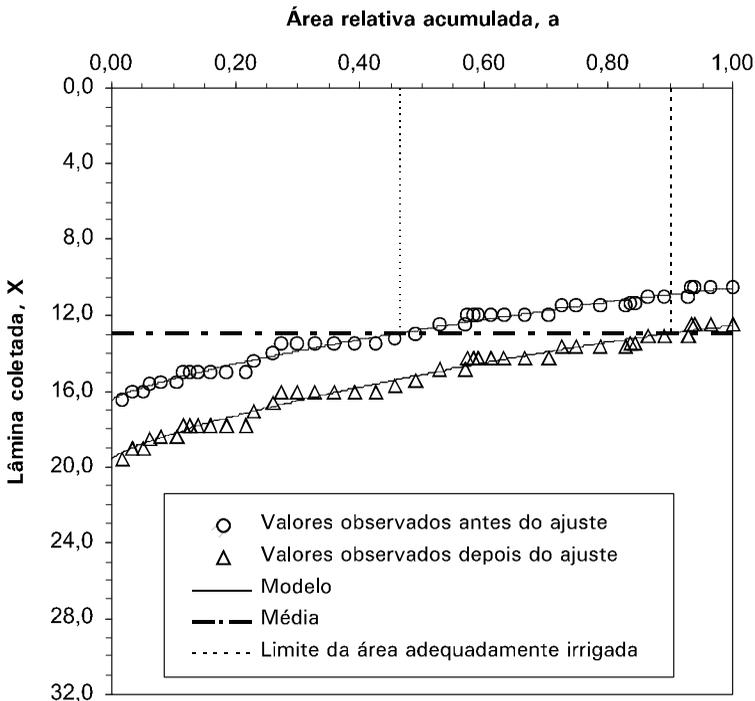


Figura 5. Perfis de água aplicada por um pivô-central, ordenados de forma decrescente, em função da fração de área irrigada, indicando dois eventos distintos de área adequadamente irrigada (46,23% e 90%).

Fator de adequação da irrigação

Tomando por base a assertiva de que o formato do perfil de distribuição da água aplicada não se altera com o aumento ou diminuição da lâmina média desejada, então pode-se afirmar que o ajuste da área adequadamente irrigada pode ser alcançado, simplesmente, deslocando todo o perfil para baixo ou para cima, conforme desejado.

Esse deslocamento pode ser definido em termos de um fator de proporcionalidade, aqui denominado **fator de adequação da irrigação**, representado por F_i e expresso, matematicamente, da seguinte forma:

$$F_i = \frac{\hat{X}_R}{\hat{X}} \quad (93)$$

onde: \hat{X}_R : lâmina de água ou vazão do perfil ajustado e \hat{X} : lâmina de água ou vazão do perfil de água cuja média seja equivalente à lâmina líquida requerida pelo cultivo. É importante ressaltar que, qualquer que seja o valor de \hat{X} ao ser multiplicado pelo Fator de Adequação F_i , ele se transforma em \hat{X}_R . Desta forma, podemos estabelecer as seguintes igualdades:

$$X_{R\min} = F_i X_{\min} \quad X_{R\max} = F_i X_{\max} \quad \bar{X}_R = F_i \bar{X} \quad (94)$$

onde $X_{R\min}$ e $X_{R\max}$: lâminas mínima e máxima ajustadas, respectivamente; \bar{X}_R : lâmina média do perfil ajustado.

Considerando a Figura 5, observa-se que a lâmina média original aplicada, \bar{X} , encontra-se com o perfil descrito por X_R , exatamente, na fração de área desejada, a_{LR} . Por isso, pode-se estabelecer a seguinte igualdade:

$$\bar{X} = X_{R\min} + (X_{R\max} - X_{R\min}) (1 - a_{LR}^n)^m \quad (95)$$

Desse modo, introduzindo as relações da Equação 94 na Equação 95, tem-se o seguinte:

$$\bar{X} = F_i \left[X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) (1 - a_{LR}^n)^m \right] \quad (96)$$

Resultando na seguinte fórmula:

$$F_i = \frac{\bar{X}}{\left[X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) (1 - a_{LR}^n)^m \right]} \quad (97)$$

Com F_i variando no seguinte intervalo:

$$\frac{\bar{X}}{X_{\max}} \leq F_i \leq \frac{\bar{X}}{X_{\min}} \Leftrightarrow 0 \leq a_{LR} \leq 1 \quad (98)$$

Com os resultados do exemplo em consideração ([Tabela 1](#)) e considerando a meta de 90% de área adequadamente irrigada, o Fator de Adequação correspondente será de:

$$F_i = \frac{12,941155}{\left[10,57 + (16,50 - 10,57) (1 - 0,9^{0,7615})^{1,12830} \right]} = 1,1879 \quad (99)$$

Isto significa dizer que para atingir 90% da área com irrigação adequada é necessário majorar a lâmina líquida requerida pelo cultivo em 18,79% para esse sistema de irrigação.

Indicadores de desempenho da irrigação ajustada

O **volume total de água aplicada**, depois do ajuste, pode ser estabelecido pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \forall_{AR} &= \bar{X}_R \\ &= F_i \bar{X} \\ &= F_i \forall_A \end{aligned} \quad (100)$$

Por sua vez, o **volume excedente**, em relação à média original, pode ser definido da seguinte forma:

$$\forall_{ER} = \int_0^{a_{LR}} (X_R - \bar{X}) da \quad (101)$$

De maneira que:

$$\begin{aligned}
 \forall_{ER} &= \int_0^{a_{LR}} (X_R - \bar{X}) da \\
 &= \int_0^{a_{LR}} X_R da - \int_0^{a_{LR}} \bar{X} da \\
 &= F_i \left[\int_0^{a_{LR}} \hat{X} da \right] - \bar{X} a_{LR} \\
 &= F_i \left[\int_0^{a_{LR}} X_{\min} da + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{a_{LR}} (1 - a^n)^m da \right] - \bar{X} a_{LR} \quad (102) \\
 &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (X_{\max} - X_{\min}) \int_0^{a_{LR}} (1 - a^n)^m da \right] - \bar{X} a_{LR}
 \end{aligned}$$

Considerando o desenvolvimento aplicado na Equação 45, pode-se inferir a seguinte solução para a integral da Equação 102:

$$\int_0^{a_{LR}} (1 - a^n)^m da = \frac{1}{n} B_{a_{LR}^n} \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) \quad (103)$$

De maneira que a Equação 102 pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \forall_{ER} &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (X_{\max} - X_{\min}) \left(\frac{1}{n} \right) B_{a_{LR}^n} \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) \right] - \bar{X} a_{LR} \quad (104) \\
 &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (X_{\max} - X_{\min}) \left(\frac{1}{n} \right) B \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) I_{a_{LR}^n} \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) \right] - \bar{X} a_{LR}
 \end{aligned}$$

Por sua vez, considerando as Equações 2 e 25, pode-se estabelecer que:

$$\frac{\bar{X} - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} = \frac{1}{n} B \left(\frac{1}{n}, m + 1 \right) \quad (105)$$

Substituindo a Equação 105 na Equação 104, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}
 \forall_{ER} &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (X_{\max} - X_{\min}) \left(\frac{\bar{X} - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} \right) I_{a_{LR}^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] - \bar{X} a_{LR} \\
 &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (\bar{X} - X_{\min}) I_{a_{LR}^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] - \bar{X} a_{LR} \\
 &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (\bar{X} - X_{\min}) \text{DISTF} (f; 2(m+1); 2(1/n)) \right] - \bar{X} a_{LR}
 \end{aligned} \tag{106}$$

Dessa forma, o volume excedente pode ser resumido no seguinte:

$$\begin{aligned}
 \forall_{ER} &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (\bar{X} - X_{\min}) I_{a_{LR}^n} \left(\frac{1}{n}, m+1 \right) \right] - \bar{X} a_{LR} \\
 &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (\bar{X} - X_{\min}) \text{DISTF} (f; 2(m+1); 2(1/n)) \right] - \bar{X} a_{LR}
 \end{aligned} \tag{107}$$

Sabendo que o valor f agora é definido por:

$$f = \left(\frac{1/n}{m+1} \right) \left(\frac{1 - a_{LR}^n}{a_{LR}^n} \right) \tag{108}$$

Então para os dados do exemplo utilizado ([Tabela 1](#)), pode-se deduzir os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 a_{LR} &= 0,90 \\
 n &= 0,7615 \\
 m &= 1,12830 \\
 a_{LR}^n &= (0,90)^{(0,7615)} = 0,9229 \\
 f &= \left(\frac{1/n}{m+1} \right) \left(\frac{1 - a_{LR}^n}{a_{LR}^n} \right) \\
 f &= (0,61702) \left(\frac{1 - 0,9229}{0,9229} \right) \\
 f &= (0,61702)(0,08354) \\
 f &= 0,05154
 \end{aligned} \tag{109}$$

Assim, pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{ER} &= F_i \left[X_{\min} a_{LR} + (\bar{X} - X_{\min}) \text{DISTF}(f; 2(m+1); 2(1/n)) \right] - \bar{X} (a_{LR}) \\
 &= (1,1879) [(10,5652)(0,9) \\
 &\quad + (12,9412 - 10,57) \text{DISTF}(0,05154; 4,2566; 2,6264)] - (12,9412)(0,9) \\
 &= (1,1879) [(10,5652)(0,9) + (12,9412 - 10,57)(0,991266)] - (12,9412)(0,9) \\
 &= 2,4455
 \end{aligned} \tag{110}$$

Assim, o **volume útil aplicado**, considerando a definição expressa pela Equação 100, pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{UR} &= \nabla_{AR} - \nabla_{ER} \\
 &= F_i \nabla_A - \nabla_{ER}
 \end{aligned} \tag{111}$$

Aplicando-se essa definição para o exemplo em questão, o volume útil resultante, depois do ajuste da lâmina líquida, será o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{UR} &= F_i \nabla_A - \nabla_{ER} \\
 &= (1,1879)(12,941155) - (2,2141) \\
 &= 12,9267
 \end{aligned} \tag{112}$$

Reportando-se à Figura 5 e à Equação 73, o **volume em deficiência** pode ser definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{DR} &= \bar{X} - \nabla_{UR} \\
 &= \nabla_A - \nabla_{UR}
 \end{aligned} \tag{113}$$

Para esse problema, o volume em deficiência pode ser calculado por:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{DR} &= \nabla_A - \nabla_{UR} \\
 &= (12,941155) - (12,92668) \\
 &= 0,014473
 \end{aligned} \tag{114}$$

A eficiência de aplicação, depois do ajuste da lâmina, pode ser, então, calculada da seguinte maneira, seguindo a definição dada pela Equação 71:

$$\begin{aligned}
 E_{AR} &= 100 \left(\frac{\nabla_{UR}}{\nabla_{AR}} \right) \\
 &= 100 \left(\frac{\nabla_{UR}}{F_i \nabla_a} \right)
 \end{aligned} \tag{115}$$

Em relação ao caso estudado, a Equação 116 resulta no seguinte:

$$\begin{aligned} E_{aR} &= 100 \left(\frac{12,92668}{(1,1879)(12,941155)} \right) \\ &= 84,09\% \end{aligned} \quad (116)$$

Dessa forma, chega-se à conclusão que, majorando a lâmina em 18,79%, a área adequadamente irrigada passa de 46,23% para 90,00%, resultando na redução da eficiência de aplicação de 94,66% para 84,09% e no aumento do excedente de água de 5,34% para 18,90%.

Considerações Finais

A função de distribuição proposta é semelhante ao modelo de retenção de água de Genutchen (1978) e possui características da função de distribuição Beta, conferindo-lhe grande potencial de ajuste aos mais variados tipos de perfil de água aplicada. Todas as relações necessárias ao cálculo da avaliação de desempenho de sistemas de irrigação são derivadas em termos de funções e expressões facilmente solucionáveis com os recursos de planilhas eletrônicas como o programa Excel. Esse modelo, por ser definido com quatro parâmetros de ajuste, em princípio, possui maior flexibilidade de ajuste do que os outros modelos, tradicionalmente utilizados como: uniforme, normal, lognormal, gama, beta e potencial, os quais são definidos com um número menor de parâmetros.

O modelo é também utilizado para derivar uma nova forma de transformação da lâmina líquida em lâmina bruta de irrigação, utilizando um Fator de Adequação da Irrigação, desenvolvido com base na idéia de que é possível ajustar o perfil da água aplicada para satisfazer uma meta previamente estabelecida de área adequadamente irrigada. O fator de adequação desenvolvido integra os indicadores de uniformidade e de eficiência de irrigação em um só fator quantitativo, diretamente, vinculado às decisões de manejo da irrigação adotadas pelo produtor.

Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. Washington: Government Printing Office, 1972. 1046 p. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55).
- BECK, J. V.; ARNOLD, K. J. **Parameter estimation in engineering and science**. New York: J. Wiley, 1977. 501 p.
- CHAUDRY, F. H. Nonuniform sprinkler irrigation application efficiency. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, Reston, v. 204, p. 165-178, 1978.
- CHRISTIANSEN, J. E. **Irrigation by sprinkling**. Berkeley: University of California, 1942. Não paginado. (University of California. California Agricultural Experiment Station. Bulletin, 670).
- DAVIS, J. R. Measuring water distribution from sprinklers. **Transactions of the American Society of Agricultural Engineers**, St. Joseph, v. 9, n. 1, p. 94-97, 1966.
- ELLIOT, R. C.; NEFF, M. E.; LEY, T. W.; SALAZAR, L. J.; WALKER, W. R.; HART, W. E.; SKOGERBOE, G. V.; KARMEI, D. **Furrow evaluation data**. Fort Collins: Departament of Agricultural and Chemical Engenniers, 1980. Não paginado.
- FOLEGATTI, M. V.; PESSOA, P. C. S.; PAZ, V. P. S. Avaliação do desempenho de um pivô central de grande porte e baixa pressão. **Scientia Agrícola**, Piracicaba, v. 55, n. 1, p. 119-127, 1998.
- HAHN, R. H; ROSENTERETER, E. E. **ASAE Standards 1989. Standards, engineering practices and data developed and adopted by the American Society of Agricultural Engineers**. St. Joseph, ASAE, 1989, p. 578-579.
- HART, W. E.; NORUM, D. I.; PERI, G. Optimal seasonal irrigation application analysis. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, Reston, v. 106, n. 3, p. 221-235, 1979.
- HART, W. E.; REYNOLDS, W. N. Analytical design of sprinkler systems. **Transactions of the American Society of Agricultural Engineers**, St. Joseph, v. 8, n. 1, p. 83-85 e 89, 1965.

KARMEI, D. Distribution pattern and losses for furrow irrigation. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, Reston, v. 104, p. 59-69, 1978.

MARQUARDT, D. M. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Society and Industrial for Applied Mathematics**, Philadelphia, v. 11, p. 431-441, 1963.

MERRIAM, J. L.; KELLER, J. **Farm irrigation system evaluation: a guide for management**. Logan: Utah State University, 1978, 271 p.

MICROSOFT CORPORATION. **Microsoft excel, versão 5.0** : guia do usuário. Redmond, 1993-1994. p. 589-603.

NORUM, S. I.; GIEDON, P.; HART, W. E. Application of system optimal depth concept. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, Reston, v. 105, n. IR4, p. 375-367, 1979.

PERI, G. P.; HART, W. E.; NORUM, D. I. Optimal irrigation depths – a method of analysis. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, Reston, v. 105, n. IR4, p. 341-354, 1979.

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. **Numerical recipes in C: the art of computing**. Cambridge: University Press, 1990. 735 p.

SAS INSTITUTE. **SAS language reference**. Cary, 1990. 1042 p.

SCALLOPI, E. J.; ALLEN, R. G. Hydraulics do center-pivot laterals. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, Reston, v. 119, n. 3, p. 341-354, 1985.

SILVA, E. M. da; HART, W. E. Modelo estatístico de distribuição de água infiltrada aplicado à irrigação deficiente. In: CONGRESSO NACIONAL DE IRRIGAÇÃO E DRENAGEM, 9., 1992, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: ABID, 1992. v. 1. p. 469-492.

SOLOMON, K. **Irrigation uniformity theory**. 1983. 269 f. Tese (Doutorado em Irrigação) – Utah State University. Logan, 1983.

WARRICK, A. W. Interrelationships of irrigation uniformity terms. **Journal of the Irrigation and Drainage Engineering**, Reston, v. 109, n. 3, p. 317-332, 1983.

Mathematical model for evaluating performance of irrigation systems

Abstract - *The irrigation performance of any irrigation system is highly facilitated when using a fitted model to represent the measured data. Several statistical distribution models, such as uniform, normal, lognormal, specialized power, beta, and gamma, have been used to fit applied water from irrigation, as an aid to evaluate the irrigation performance. However, the goodness of fitting the model to the observed values is very important to warrant reliable results. The purposed model resembles a power function and has the desirable flexibilities for adjusting data. It uses four adjusting parameters, conferring to the model a great deal of power to adjust a variety of possible shapes of normally found distribution profiles from water irrigation applications. Its adjusting parameters can be easily estimated using the "Solver" routine from Microsoft Excel. The new mathematical model is used to represent the applied water to derive the formulations needed to calculate all the necessary parameters for compute uniformities and efficiency measures. Additionally, it is purposed an irrigation factor to adjust a given crop water depth so that the resulting average applied water will match a established goal, defined in terms of the desired amount of fully irrigated area.*

Index terms: irrigation performance, mathematical model, irrigation efficiency.